



Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова  
*Экономический факультет*

М.Б. ДЕНИСЕНКО, Н.М. КАЛМЫКОВА

# Демография

## В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

*Учебное пособие*

**ЧЕРНОВОЙ ВАРИАНТ**

МОСКВА  
2006

УДК  
ББК

**Денисенко М.Б., Калмыкова Н.М.** Демография в примерах и задачах. Учебное пособие. – Москва, 2006. - с.

В учебном пособии «Демография в примерах и задачах» в доступной форме на конкретных примерах излагаются основные методы современных демографических исследований с большим выбором задач для семинарских занятий и самостоятельной работы. Ряд методов и демографических моделей впервые представлены в отечественной учебной литературе.

В учебном пособии на большом количестве примеров рассмотрены основные понятия и методы анализа, моделирования и прогнозирования демографических процессов и структур. Большое внимание уделено базовым принципам демографического анализа. Последовательно излагается сущность метода демографических таблиц, включая таблицы множественного выбытия. В рамках теории стабильного населения вводятся новые для отечественной учебной литературы понятия момента демографического роста и демографического потенциала. Детально излагается процедура реализации демографического прогноза, в том числе в матричной форме. Примеры приложения демографических знаний на практике в недемографических областях представлены в разделе «Функциональные прогнозы населения». Все разделы сопровождаются задачами, соответствующими современным стандартам преподавания демографии.

Учебное пособие предназначено для студентов, аспирантов и преподавателей высших учебных заведений, где преподаются демографические дисциплины. Представляет интерес для ученых и специалистов, занимающихся проблемами населения.

Учебное пособие подготовлено при содействии НФПК – Национального фонда подготовки кадров в рамках Программ «Совершенствование преподавания социально-экономических дисциплин в ВУЗах» инновационного проекта развития образования.

ISBN

© Денисенко М.Б., Калмыкова Н.М. 2006.

---

*ДОРОГИМ УЧИТЕЛЯМ  
ДМИТРИЮ ИГНАТЬЕВИЧУ ВАЛЕНТЕЮ  
И ДМИТРИЮ КУЗЬМИЧУ ШЕЛЕСТОВУ  
ПОСВЯЩАЕТСЯ*

**М.Б. ДЕНИСЕНКО, Н.М. КАЛМЫКОВА**

# **Демография**

## **В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ**

*Учебное пособие*

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>8</b>
<b>РАЗДЕЛ 1. ОСНОВЫ ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО АНАЛИЗА .....</b>	<b>12</b>
1.1. ДЕМОГРАФИЧЕСКАЯ СЕТКА: ВРЕМЯ И ВОЗРАСТ В ДЕМОГРАФИИ .	12
1.1.1. Локализация совокупностей индивидов.....	16
1.1.2. Локализация совокупностей событий.....	18
1.2. ПРОДОЛЬНЫЙ И ПОПЕРЕЧНЫЙ АНАЛИЗ.....	21
1.2.1. Основные принципы продольного анализа.....	21
1.2.2. Основные принципы поперечного анализа.....	24
ЗАДАЧИ.....	27
1.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНТЕНСИВНОСТИ И КАЛЕНДАРЯ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.....	36
ЗАДАЧИ.....	47
<b>РАЗДЕЛ 2. АНАЛИЗ ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ И СТАНДАРТИЗАЦИЯ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ .....</b>	<b>52</b>
2.1. АНАЛИЗ ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ.....	52
2.1.1. Построение и анализ возрастно-половой пирамиды .....	52
ЗАДАЧИ.....	55
2.2. СТАНДАРТИЗАЦИЯ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ .....	63
2.2.1. Прямая стандартизация .....	64
2.2.2. Косвенная стандартизация.....	65
2.2.3. Обратная стандартизация.....	66
2.2.4. Двойная стандартизация .....	66
ЗАДАЧИ.....	67
<b>РАЗДЕЛ 3. ТАБЛИЦЫ СМЕРТНОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ .....</b>	<b>71</b>
3.1. ПОКАЗАТЕЛИ ТАБЛИЦЫ СМЕРТНОСТИ.....	71
3.2. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ТАБЛИЦ СМЕРТНОСТИ.....	76
3.2.1. Метод смертных списков.....	76
3.2.1. Демографический метод.....	76
3.3. МОДЕЛЬ СТАЦИОНАРНОГО НАСЕЛЕНИЯ .....	78
3.4. ПРИЛОЖЕНИЯ МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНОГО НАСЕЛЕНИЯ.....	80
ЗАДАЧИ.....	83
<b>РАЗДЕЛ 4. АНАЛИЗ СМЕРТНОСТИ И ЗАБОЛЕВАЕМОСТИ.....</b>	<b>113</b>
4.1. АНАЛИЗ СМЕРТНОСТИ ПО ПРИЧИНАМ СМЕРТИ .....	113
4.1.1. Классификации причин смерти.....	113
4.1.2. Коэффициенты смертности по причинам смерти.....	114
4.1.3. Стандартизованные коэффициенты смертности по причинам смерти .....	115
4.2. АНАЛИЗ СЕЗОННОСТИ СМЕРТНОСТИ .....	115

4.3. ПОКАЗАТЕЛЬ МЛАДЕНЧЕСКОЙ СМЕРТНОСТИ .....	116
4.4. БИОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЛАДЕНЧЕСКОЙ СМЕРТНОСТИ .....	119
4.5. МОДЕЛИ СМЕРТНОСТИ .....	120
4.5.1. «Законы» смертности .....	120
4.5.2. Модельные (типовые) таблицы смертности.....	122
4.5.3. Реляционные модели .....	125
4.6. АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ И ДИНАМИКИ ЗАБОЛЕВАЕМОСТИ .....	128
4.6.1. Абсолютные и относительные показатели заболеваемости и инвалидности .....	128
4.6.2. Таблицы заболеваемости.....	129
4.6.3. Таблицы инвалидизации.....	130
4.6.4. Измерение уровня здоровья.....	131
ЗАДАЧИ.....	131
<b>РАЗДЕЛ 5. АНАЛИЗ РОЖДАЕМОСТИ .....</b>	<b>151</b>
5.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ РОЖДАЕМОСТИ .....	151
5.1.1. Система коэффициентов рождаемости .....	151
5.1.2. Календарь рождаемости.....	153
5.1.3. Вероятность увеличения семьи.....	155
5.1.4. Индексы рождаемости.....	155
5.1.5. Таблицы рождаемости .....	157
5.2. МОДЕЛЬ РОЖДАЕМОСТИ КОУЛА-ТРАССЕЛА .....	158
ЗАДАЧИ.....	160
<b>РАЗДЕЛ 6. АНАЛИЗ БРАЧНОСТИ.....</b>	<b>179</b>
6.1. МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕНДЕНЦИЙ БРАЧНОСТИ. ТИПЫ БРАЧНОГО ПОВЕДЕНИЯ.....	179
6.2. ОСОБЕННОСТИ РОССИЙСКИХ ИСТОЧНИКОВ ДАННЫХ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ БРАЧНОСТИ.....	184
6.3. ПОКАЗАТЕЛИ БРАЧНОСТИ .....	185
6.3.1. Характеристики брачной структуры .....	186
6.3.2. Характеристики интенсивности брачности в календарном году и в реальном поколении .....	186
6.3.3. Характеристики календаря брачности .....	191
6.4. СУММАРНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ БРАЧНОСТИ И ИТоговая БРАЧНОСТЬ РЕАЛЬНОГО ПОКОЛЕНИЯ.....	192
ЗАДАЧИ.....	193
<b>РАЗДЕЛ 7. АНАЛИЗ МИГРАЦИИ.....</b>	<b>217</b>
7.1. АБСОЛЮТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МИГРАЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ .....	220
7.2. ИЗМЕРЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ МИГРАЦИЙ.....	223
ЗАДАЧИ.....	228
<b>РАЗДЕЛ 8. ТАБЛИЦЫ МНОЖЕСТВЕННОГО ВЫБИТИЯ .....</b>	<b>239</b>
8.1. КОМБИНИРОВАННАЯ ТАБЛИЦА: БРАЧНОСТЬ И СМЕРТНОСТЬ.....	242

8.2. КОМБИНИРОВАННАЯ ТАБЛИЦА: ВСТУПЛЕНИЕ В ПЕРВЫЙ БРАК И СМЕРТНОСТЬ .....	243
8.3. ТАБЛИЦЫ СМЕРТНОСТИ ПО ПРИЧИНАМ СМЕРТИ .....	246
8.3.1. Таблица смертности от одной из причин.....	248
8.3.2. Таблица смертности от всех причин при условии исключения одной причины .....	249
ЗАДАЧИ.....	250
<b>РАЗДЕЛ 9. ДЕМОГРАФИЧЕСКИЙ РОСТ .....</b>	<b>268</b>
9.1. УРАВНЕНИЕ ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО БАЛАНСА.....	268
9.2 СКОРОСТЬ ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО РОСТА .....	271
9.3. ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ РОСТА НАСЕЛЕНИЯ.....	272
ЗАДАЧИ.....	274
<b>РАЗДЕЛ 10. ДЕМОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОГНОЗЫ .....</b>	<b>288</b>
10.1 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ.....	288
10.2. КОГОРТНО-КОМПОНЕНТНЫЙ МЕТОД ПРОГНОЗА ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ И ВОЗРАСТНО-ПОЛОВОЙ СТРУКТУРЫ .....	289
10.3. ДЕМОГРАФИЧЕСКИЙ ПРОГНОЗ ДЛЯ ЗАКРЫТОГО НАСЕЛЕНИЯ ..	293
10.4. ПРОГНОЗ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ С УЧЕТОМ МИГРАЦИИ .....	301
10.5. МНОГОРЕГИОНАЛЬНЫЙ ПРОГНОЗ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ ..	306
10.6. МАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ ВОСПРОИЗВОДСТВА НАСЕЛЕНИЯ.....	307
ЗАДАЧИ.....	311
<b>РАЗДЕЛ 11. МОДЕЛЬ СТАБИЛЬНОГО НАСЕЛЕНИЯ.....</b>	<b>318</b>
11.1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СТАБИЛЬНОГО НАСЕЛЕНИЯ .....	318
11.2. ОСНОВНЫЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ В СТАБИЛЬНОМ НАСЕЛЕНИИ.....	321
11.3. ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛЬНОГО НАСЕЛЕНИЯ.....	323
11.3.1. Вычисление истинного коэффициента естественного прироста.....	323
11.3.2. Вычисление истинных коэффициентов рождаемости и смертности .....	325
11.3.3. Вычисление возрастной структуры стабильного населения .....	327
11.4. СООТНОШЕНИЕ ИСТИННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ЕСТЕСТВЕННОГО ПРИРОСТА И НЕТТО-КОЭФФИЦИЕНТА ВОСПРОИЗВОДСТВА.....	328
11.5. ДЕМОГРАФИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ.....	329
11.6. ИНЕРЦИЯ ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО РОСТА.....	330
11.7. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ СТАБИЛЬНОГО НАСЕЛЕНИЯ.....	332
ЗАДАЧИ.....	333
<b>РАЗДЕЛ 12. ВОСПРОИЗВОДСТВО НАСЕЛЕНИЯ.....</b>	<b>354</b>
12.1. ПРОСТЫЕ МЕРЫ ВОСПРОИЗВОДСТВА.....	354
12.2. ИСТИННЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ЕСТЕСТВЕННОГО ПРИРОСТА .....	354
12.3. ПОКАЗАТЕЛИ ЗАМЕЩЕНИЯ ПОКОЛЕНИЙ.....	355
12.3.1. Брутто-коэффициент воспроизводства .....	355
12.3.2. Нетто-коэффициент воспроизводства.....	356
12.3.3. Экономичность режимов воспроизводства .....	357

---

12.3.4. Индекс замещения поколений .....	357
12.3.5. Нетто-коэффициент воспроизводства для реального поколения.....	358
ЗАДАЧИ.....	358
<b>РАЗДЕЛ 13. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОГНОЗЫ НАСЕЛЕНИЯ.....</b>	<b>363</b>
13.1. ПРОГНОЗЫ ЧИСЛЕННОСТИ И СОСТАВА ДОМОХОЗЯЙСТВ.....	364
13.2. ПРОГНОЗЫ ЧИСЛЕННОСТИ И СТРУКТУРЫ ЭКОНОМИЧЕСКИ АКТИВНОГО НАСЕЛЕНИЯ.....	366
13.3. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОСТИ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ .....	367
13.4. ПРОГНОЗЫ УРОВНЕЙ ЗАНЯТОСТИ И БЕЗРАБОТИЦЫ.....	372
13.5. ПРОГНОЗЫ СПРОСА НА ТРУД.....	375
ЗАДАЧИ.....	376
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>390</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Первоначально эта книга задумывалась как практикум или задачник к учебному курсу “ Демография”. В силу специфики предмета курса – массовые явления, которые измеряются достаточно точно по сравнению с другими социальными феноменами – практические занятия являются его неотъемлемой частью, без которой невозможно разобраться в противоречивом мире демографических тенденций и научиться выполнять демографические прогнозы и анализировать их результаты. Обладание навыками работы с данными – органичная черта начинающего демографа.

Однако современные преподаватели демографии в России практически лишены методической поддержки в связи с отсутствием современными материалов для выполнения студентами практических заданий. Последний изданный в нашей стране практикум по демографии вышел в 1985 году<sup>1</sup>. Ему предшествовали опубликованные «Методические указания к курсу демографии», разработанные в МЭСИ<sup>2</sup>, и сборник задач А.С.Семенов<sup>3</sup>. В своей преподавательской работе мы используем некоторые задачи из этих содержательных изданий, которые сегодня являются библиографической редкостью. Но многие темы или тенденции в этих книгах не могли быть отражены. За последние три десятилетия демографическая реальность заметно изменилась, а демографическая наука ушла вперед.

Уже в начале работы авторы данного пособия четко осознали, что только сборника задач будет явно недостаточно для тех, кто преподает или изучает демографию. Во-первых, для понимания принципов действия ряда методов нужны предварительные демонстрационные примеры решения соответствующих задач. Во-вторых, не только многие новые, но даже некоторые ставшие уже классическими демографические методы недостаточно полно представлены в отечественной учебной литературе. Стало очевидным, что задачам должны

<sup>1</sup> См. Боярский А.Я., Бахметова Г.Ш., Харченко Л.П. Практикум по демографии. – М.: Мысль, 1985.

<sup>2</sup> Методические указания и типовые задачи по основным темам курса демографии. – М.: МЭСИ, 1971.

<sup>3</sup> Семенова А.С., Сборник задач по курсу демографии. – М.: Статистика, 1972.

предшествовать комментарии по теме, содержащие определения основных понятий, методов и моделей. В итоге было решено создать пособие по демографии, сочетающее в себе как элементы учебника с большим количеством разобранных примеров, так и задачника.

При подготовке пособия авторами был принят во внимание опыт преподавания демографических дисциплин в ведущих университетах мира, с которым они имели возможность ознакомиться на практике в ходе своих стажировок, в первую очередь в рамках проекта ТЕМПУС Т\_ЕР-10092-95 «Образование в области сбора, обработки и анализа данных о населении» (1995 – 1999 гг.). Во многих странах (в США, Франции, Великобритании, Италии, Бельгии и др.) задачи по демографии собраны в специальных практикумах или представлены на страницах некоторых учебников<sup>4</sup>. Многие из этих задач стали частью мирового образовательного стандарта по демографии и были включены нами в наше пособие. Кроме того, в пособие вошли задачи, разработанные его авторами в процессе преподавания ими курсов «Экономика народонаселения и демография», «Основы демографического анализа», «Демографическое моделирование и прогнозирование» для бакалавров и магистров экономического и социологического факультетов МГУ, на социологическом факультете и факультете мировой экономики ГУ-ВШЭ. В основу ряда задач положены результаты научных исследований российских демографов. Многие задачи, составленные на реальных демографических данных, призваны в то же время углубить знания студентами о демографической ситуации в России и ее регионах, а также в мире.

Пособие состоит из 13 тематических разделов, выбор которых обусловлен структурой курса «Демография»: Основы демографического анализа, Анализ возрастной структуры и стандартизация демографических коэффициентов,

---

<sup>4</sup> См., например: Bonneuil N., Introduction a la modelisation démographique. Armand Colin, Paris, 1997; Dittgen A., Lamy-Festy M., Travaux pratiques d'analyse démographique. Masson, Paris, 1989; Keyfitz N., Beekman J.A., Demography through Problems. Springer-Verlag, New York, 1984; Pollard J.H. at all, Demographic Technique. Pergamon Press. Australia. 1974; Roussel L., Gani L. et Girard A., Analyse Démographique. Exercices et problèmes, Libraire A.Colin, Paris, 1973; Santini A., Analisi Demografica. Applicazioni. La Nuova Italia, 1992; **Hinde A., Demographic Methods, London: Arnold. 1998** и др.

Таблицы смертности и их приложения, Анализ смертности и заболеваемости, Анализ рождаемости, Анализ брачности, Анализ миграции, Таблицы множественного выбытия, Демографический рост, Демографические прогнозы, Модель стабильного населения, Воспроизводство населения, Функциональные прогнозы населения. В конце каждого раздела приведены задачи, помогающие усвоить изложенный в разделе материал. К задачам, отмеченным звездочкой (\*), даны ответы или развернутые решения. В конце пособия приведены необходимые справочные статистические материалы, варианты контрольных тестов и список литературы. Пособие предназначено для студентов и преподавателей, а также для всех тех, кому по роду своей деятельности нужны знания методов демографического анализа.

Авторам хочется выразить свою глубочайшую признательность всем нашим друзьям и коллегам, без которых данное издание никогда бы не осуществилось. В первую наша книга – это выражение благодарности нашим дорогим учителям, профессорам экономического факультета МГУ Дмитрию Игнатьевичу Валентею и Дмитрию Кузьмичу Шелестову. Благотворное влияние этих людей на судьбы их учеников выходит далеко за рамки науки.

Мы благодарны нашим зарубежным коллегам, принимавшим непосредственное участие в нашей работе «словом и делом»: Кристофу Вандерскрику, Катрин Гурбен (Лувенский Католический Университета, Бельгия), Грациелле Казелли, Жан-Пьеру Далла Зуанна, Филумене Рачиоппи, Пьеру Джорджи, Алессандре Де Роза (Римский университет «Ла Сапиенза», Италия), Элизабет Браун, Алфреду Дитжену (Университет Париж-I-Пантеон-Сорбонна, Франция), Мишелю Гийо (университет Медисон, штат Висконсин, США), Марте Рой (Отдел народонаселения ООН). Благодаря замечаниям известных отечественных специалистов Александра Авдеева и Сергея Васина авторам удалось уточнить многие положения своей работы. Особо хочется выразить благодарность профессору Лувенского Католического Университета Гийому Вуншу, академику

Бельгийской академии наук, внесшему существенный вклад в совершенствование нашей преподавательской деятельности.

И конечно же, мы благодарны всем студентам, которые прошли через наши лекции и семинары, начиная с 1989 года. Они являются непосредственными нашими соавторами.

Авторы будут признательны за любые замечания и комментарии, которые появятся у читателей.

Март 2006

М. Денисенко  
Н. Калмыкова

## **РАЗДЕЛ 1. ОСНОВЫ ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

Прежде чем обратиться к основам демографического анализа, необходимо определить его место среди разделов демографии. Это тем более важно, поскольку часто под демографическим анализом подразумевают любой анализ данных о населении, осуществленный любыми методами, в том числе социологическими, статистическими, математическими, картографическими и пр. Подобное представление имеет право на существование, но при этом остается неясным, в чем же специфика этого раздела демографии. Обратимся к Энциклопедическому словарю «Народонаселение». В нем приводится следующее определение демографического анализа: «изучение процесса смены поколений людей и его факторов»<sup>5</sup>. Таким образом, демографический анализ представляет собой совокупность математических и статистических методов, посредством которых изучают воспроизводство населения, то есть изменение численности населения в результате взаимодействия процессов рождаемости, смертности, брачности и миграции и его возрастно-половой структуры.

### **1.1. ДЕМОГРАФИЧЕСКАЯ СЕТКА: ВРЕМЯ И ВОЗРАСТ В ДЕМОГРАФИИ**

Демографическая сетка представляет собой графическое изображение, которое широко используется для представления демографических данных. История создания демографической сетки берет свое начало в середине XIX века с работ Цейнера, Кнаппа и др. Долгое время ее автором считался Лексис, хотя немецкий математик Браш за несколько лет до Лексиса придумал свой вариант графика, в котором уже были заложены принципы построения и использования современной демографической сетки. Демографическая сетка не всегда существовала в знакомом нам виде. Спустя три четверти века после появления «сетки Лексиса» (1874-1875 гг.) французский демограф Р. Пресса предложил ту ее форму, которой мы пользуемся сегодня.

---

<sup>5</sup> А.Г. Волков Анализ демографический // Народонаселение. Энциклопедический словарь. М., 1994, стр. 13

Для локализации событий на демографической сетке используются три временные координаты каждого события:

- дата наступления события;
- возраст, в котором наступило событие;
- дата рождения индивида, с которым произошло наблюдаемое событие.

Демографическая сетка соединяет в одном графике эти три формы представления времени. Возраст может быть представлен в трех разных формах:

- *точный возраст*: промежуток времени, истекший с момента рождения и определенный наиболее точно. Например: 2 года, 6 месяцев, 2 недели и 4 дня.
- *возраст в исполнившихся годах*: целочисленная (в годах) часть точного возраста или точный возраст на последний день рождения. Это ответ, который обычно дают на вопрос «Сколько Вам лет?». В нашем примере – 2 года.
- *возраст, исчисляемый как разница календарных лет*. Например, если индивид родился в 1994 году, то в 1999 году его возраст как разницу календарных лет можно вычислить следующим образом:

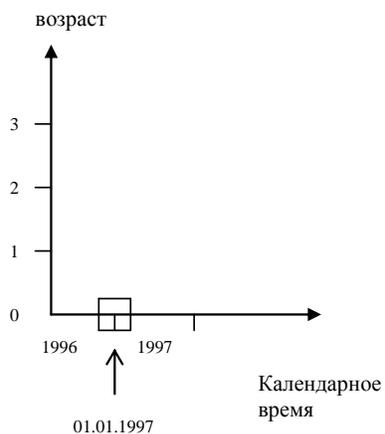
$$1999-1994= 5 \text{ лет.}$$

Демографическая сетка представляет собой двумерный график, на котором для координат «возраст» и «календарная дата» отведены собственные оси: на горизонтальной оси (оси времени) расположены календарные даты; единицей измерения на этой оси обычно является год. Вертикальная ось отведена для возраста, единицей измерения на ней также обычно бывает один год. На оси времени конец каждого года одновременно является и началом следующего года, например, одной и той же точкой обозначены 31 декабря 2004 года и 1 января 2005 года.

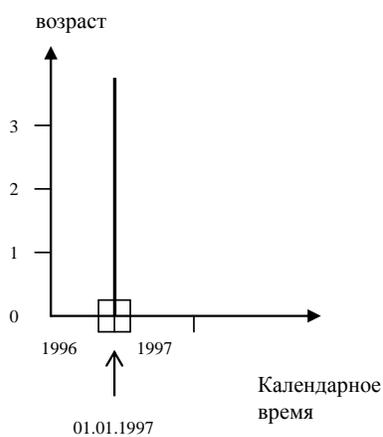
На вертикальной оси точки, отмеченные цифрами, означают точный возраст, равный в точности одному, двум, трем, четырем и т.д. годам. Отрезок между двумя такими точками соответствует возрасту в исполнившихся годах. Например,

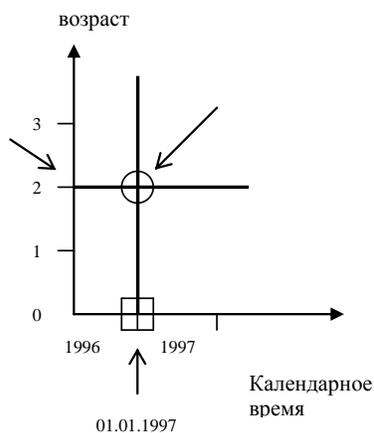
после того, как индивиду исполнилось ровно 2 года, на протяжении всего последующего года его возраст будет определяться как «2 исполнившихся года».

На горизонтальной оси необходимо найти точку, соответствующую интересующей нас дате, т.е. 01.01.1997



Из этой точки надо восстановить вертикальную линию: все события, наступившие 01.01.1997, обязательно будут расположены на этой линии. Подобные линии принято называть *линиями времени*.





Затем нужно на вертикальной оси найти точку, соответствующую возрасту “в точности 2 года”, и из нее провести горизонтальную линию. Событие “второй день рождения” может находиться только на этой линии. Эти линии называют *линиями возраста*.

Интересующее нас событие должно находиться одновременно и на вертикальной, и на горизонтальной линии. Двойному условию отвечает единственная точка, расположенная на пересечении двух прямых. Именно в этом месте и находится искомое событие.

Рис. 1.1. Локализация события на демографической сетке

Для того чтобы нанести какое-либо событие на демографическую сетку, достаточно знать две его координаты, например, возраст индивида и дату наступления события. Третья координата вычисляется на основе двух других. Например, если из даты наступления события вычесть дату рождения, получим точный возраст, в котором находился индивид в момент наступления события. На рис. 1.1. представлено событие «исполнение в точности двух лет 1 января 1997 года».

Хотя демографическая сетка по определению представляет собой двумерный график, каждое событие на ней имеет три координаты, так как на самом деле горизонтальная ось несет на себе две координаты, а не одну, как это может показаться с первого взгляда: и календарное время, и дату рождения. Эти три координаты могут быть представлены в виде точки или интервала:

- дата или год рождения индивида отображаются в виде точки или отрезка на горизонтальной оси. Дате рождения соответствует наклонная линия – линия жизни, на которой расположены все события в жизни индивида. Две линии жизни, соответствующие началу и концу года, ограничивают наклонный «коридор», в котором заключены линии

жизни всех индивидов, родившихся в течение данного года. Совокупность людей, родившихся в течение одного года (нескольких лет) называется *поколением*.

- дата или год наступления демографического события расположены на вертикальной линии или в вертикальном «коридоре» между двумя линиями времени, ограничивающими начало и конец этого года.
- точный возраст или возраст в исполнившихся годах отображаются в виде горизонтальной линии или горизонтального «коридора», ограниченного линиями возраста.

Для упрощения чтения сетки на график обычно наносят:

- горизонтальные линии, соответствующие целой части точного возраста;
- вертикальные линии, соответствующие началу (и в то же время концу) года;
- наклонные линии, разделяющие поколения.

Демографические данные, которые наносят на сетку, представляют собой совокупности событий или совокупности индивидов.

#### *1.1.1. Локализация совокупностей индивидов*

Примеры локализации совокупностей индивидов приведены на Рисунке 1.2. Например, при проведении переписи населения регистрируется возраст индивидов в точный момент времени. При этом опубликованные результаты относятся не к точному возрасту каждого индивида, а к возрасту в исполнившихся годах. Для каждого возраста в исполнившихся годах нам известна численность совокупности индивидов в данном возрасте. Например, в результате переписи 1989 г. мы получили 450 индивидов в возрасте 2 исполнившихся года. Эта совокупность будет находиться на пересечении горизонтального «коридора», соответствующего возрасту «2 исполнившихся года», и вертикальной линии, соответствующей дате переписи (см. рис. 1.2а). В результате мы получим вертикальный отрезок, который можно интерпретировать следующим образом: «450 линий жизни индивидов в момент переписи достигли этого отрезка». Все эти индивиды принадлежат к поколению 1986 года рождения. То есть данная

совокупность может быть представлена как численность поколения 1986 года рождения на 1 января 1989 года. В этом выражении координата года рождения заменяет координату возраста в исполнившихся годах.

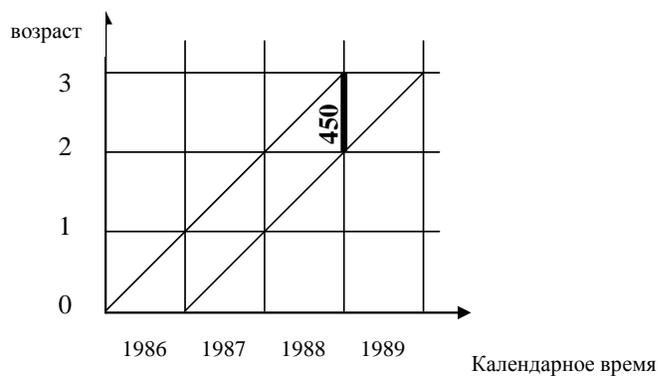


Рис. 1.2а. Локализация совокупности индивидов в возрасте, выраженном в исполнившихся годах

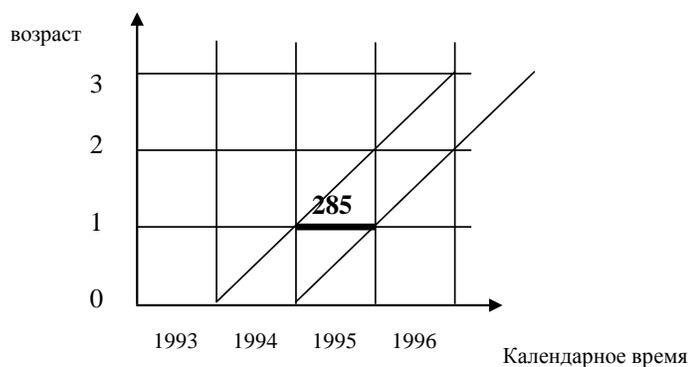


Рис. 1.2б. Локализация совокупности индивидов в точном возрасте

Если необходимо нанести на сетку 285 индивидов, отпраздновавших первый день рождения в 1995 году, то эта совокупность будет расположена на пересечении вертикального «коридора», соответствующего 1995 году, и горизонтальной линии, соответствующей точному возрасту «1 год» (рис. 1.2б). Иными словами, это 285 индивидов 1994 года рождения, отпраздновавших исполнение 1 года. То есть в этом случае исходная координата года наступления события заменяется на координату года рождения.

### 1.1.2. Локализация совокупностей событий

Каждое событие может иметь три временные координаты: дату наступления события; возраст индивида, с которым произошло событие, и дату рождения этого индивида. Сочетание известных координат приводит к появлению разных совокупностей событий. Покажем это на примерах.

Пример 1. Нанести на сетку 50 смертей, наступивших в 1996 году в возрасте одного исполнившегося года. Эти смерти будут располагаться на пересечении вертикального «коридора», соответствующего 1996 году, и горизонтального «коридора», соответствующего возрасту «1 исполнившийся год» (см. рис. 1.3а). Число, помещенное в середину квадрата, интерпретируется следующим образом: «50 линий жизни окончились смертью в данном квадрате». Умершие индивиды принадлежат при этом к двум поколениям: 1994 и 1995 годов рождения.

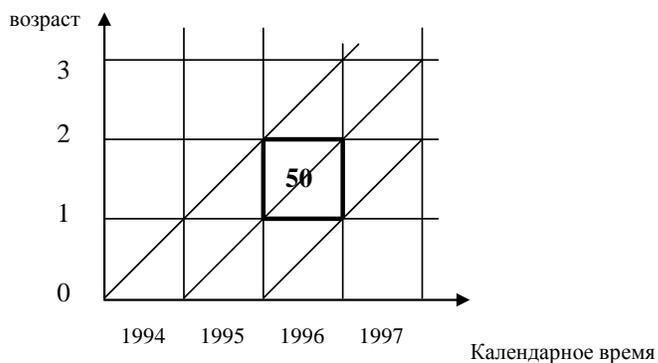


Рис. 1.3а.

Пример 2. Нанести на сетку 67 смертей, наступивших в поколении 1994 года рождения в возрасте 1 исполнившийся год. Эти смерти будут располагаться в параллелограмме на пересечении «коридора», соответствующего поколению 1994 года рождения, и горизонтального «коридора», соответствующего возрасту «1 исполнившийся год» (см. рис. 1.3б). Эти смерти наступили в течение двух соседних лет (1994 и 1995). Если предположить, что смерти распределены равномерно внутри полученного

параллелограмма, то в среднем можно считать, что они наступили в точном возрасте 1,5 года.

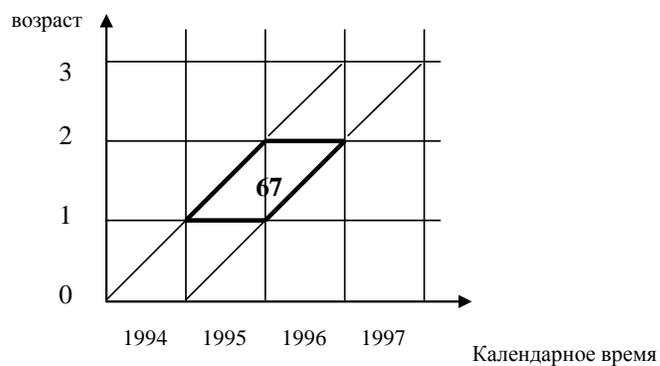
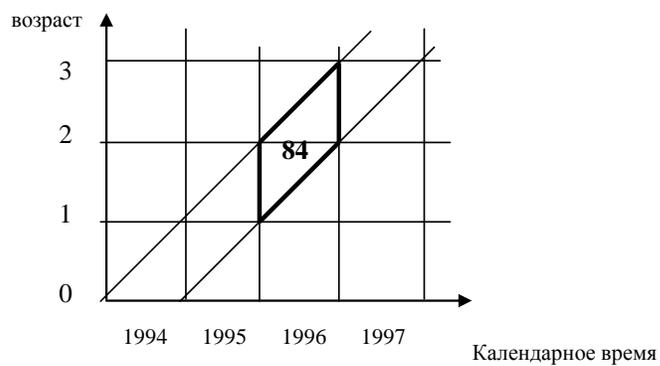


Рис. 1.3б.

Пример 3. Нанести на сетку 84 смерти в поколении 1994 года, наступившие в 1996 году. Эти смерти будут расположены в параллелограмме, находящемся на пересечении наклонного «коридора», соответствующего 1994 году рождения, и вертикального «коридора», соответствующего 1996 году (рис. 1.3в). Вписанное в параллелограмм число может трактоваться следующим образом: «84 смерти в поколении 1994 года рождения, наступившие в среднем в точном возрасте 2 года». Эти смерти относятся к двум смежным возрастам: один и два исполнившихся года.



*Рис. 1.3в*

Пример 4. Нанести на сетку смерти 15 детей, родившихся в 1996 году и умерших в 1997 году в возрасте 0 исполнившихся лет. Эти смерти расположены в треугольнике (Рис. 1.3г) и относятся к конкретному году, поколению и возрасту.

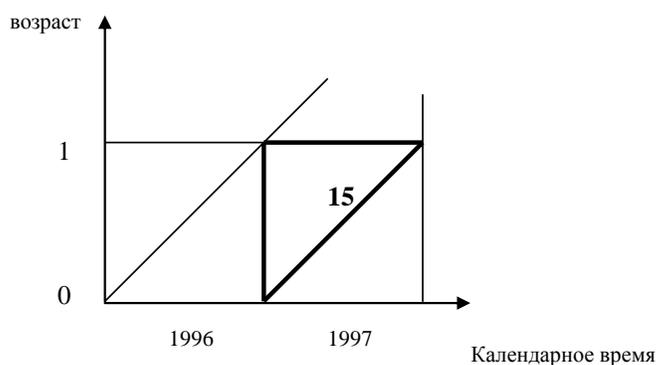


Рис. 1.3г

## 1.2. ПРОДОЛЬНЫЙ И ПОПЕРЕЧНЫЙ АНАЛИЗ

Демографические процессы в населении можно изучать с двух точек зрения. Например, мы можем интересоваться тем, сколько детей родила женщина на протяжении всей жизни и с каким интервалом, сколько раз вступала она в брак, сколько раз и с какой периодичностью меняла место жительства. Другими словами, мы можем интересоваться демографическими событиями, происходившими на протяжении жизни индивида или группы индивидов. На демографической сетке события, происходившие с индивидами на протяжении всей жизни, будут располагаться в наклонном «коридоре» вдоль линий жизни. Этот подход получил название продольного анализа<sup>6</sup>.

### 1.2.1. Основные принципы продольного анализа

Задача продольного анализа состоит в том, чтобы проследить интенсивность наступления демографических событий и интервалы между ними (календарь) на протяжении жизни группы индивидов. Частным случаем продольного анализа является когортный анализ, то есть изучение интенсивности и календаря событий на протяжении жизни определенной когорты. Интерес к

<sup>6</sup> Во французском языке этот подход называют «analyse longitudinale», в английском – «longitudinal analysis».

изучению событий в реальных поколениях появился в конце XIX в.: Лексис, Майр и Бек использовали когортный подход для изучения брачности реальных поколений. В 1920-е гг. В. Деррик применил этот подход для изучения смертности. Но достаточно широко его начинают применять только с конца 1940-х гг.<sup>7</sup> В отечественной науке одной из первых использовать когортный подход начала Р.И. Сифман, что нашло отражение в ее работах, посвященными изучению рождаемости реальных поколений женщин в СССР<sup>8</sup>.

Основная идея когортного анализа заключается в том, что каждая когорта представляет собой *особую* группу индивидов по сравнению с другими когортами. Как писал Н. Райдер, «члены одной когорты по году рождения (поколения) имеют «общую историческую локализацию», [...] каждая когорта имеет особую композицию и характер, отражающие условия ее возникновения и ее историю; [...] общность даты (рождения) придает каждой когорте ее собственное временное пространство, собственный стиль и собственную правду [...]»<sup>9</sup>. Например, война или эпидемия могут оставить негативные следы на будущем здоровье индивидов, испытавших эти невзгоды в одинаковом возрасте<sup>10</sup>.

Прежде чем остановиться подробнее на когортном анализе, приведем несколько определений:

**Когорта:** совокупность индивидов, переживших в течение одного и того же промежутка времени (т.е. одновременно) некоторое *исходное событие*, положившее начало формированию данной когорты. Например, брачная когорта формируется в момент вступления в брак ее членов, миграционная когорта формируется в момент смены места жительства входящими в нее индивидами. Таким образом, исходное событие объединяет индивидов в когорт. Если в качестве исходного события выступает рождение, то мы получим особый случай

---

<sup>7</sup> См. работы П. Уэлптона (P. Whelpton), посвященные изучению рождаемости; работы Н. Райдера (N. Ryder). Уэлптон ввел в научный обиход понятия продольного и поперечного анализа, а также понятие когорты.

<sup>8</sup> См., например: Р.И. Сифман «Динамика рождаемости в СССР» М., 1974

<sup>9</sup> N.B. Ryder (1965) The cohort as a concept in the study of social change // American Sociological Review, 30(6), pp. 843-861

<sup>10</sup> См., например: А. Блюм, С. Захаров Демографическая история СССР и России в зеркале поколений // Население и общество, 1997, № 17

когорты, наиболее часто используемый в демографическом анализе, – **поколение**, т.е. совокупность индивидов, родившихся в течение одного промежутка времени (года, пятилетия)<sup>11</sup>.

**Демографические события** складываются в **демографические процессы**:

Демографический процесс	Демографическое событие
Смертность	Смерть
Рождаемость	Рождение
Брачность	Брак
Разводимость	Развод
Миграция	Переезд, смена места жительства

Демографические события могут быть двух видов:

1. **Неповторяющиеся демографические события** – события, которые могут произойти в жизни индивида только один раз. Например, первый брак, рождение первого ребенка, смерть.
2. **Повторяющиеся демографические события** – события, которые могут наступить в жизни индивида несколько раз. Например, браки и рождения без различия очередности.

Демографические процессы также могут быть двух видов:

1. **Процессы, исключаящие индивида из исходной численности когорты.**  
Классический пример такого процесса – смертность. Если речь идет об изучении брачной когорты, то разводимость также будет исключать индивида из брачной когорты.
2. **Процессы, не исключаящие индивида из исходной численности когорты.**  
Например, брачность, рождаемость без учета очередности брака и ранга рожденных детей.

<sup>11</sup> В данном разделе речь идет только о собственно демографических когортах, сформированных на основе исходного события демографического характера. Можно представить себе и другие виды когорт. Например, студенты, одновременно поступившие на первый курс, могут считаться особой когортой, в которой можно проследить уровень успеваемости и вероятности перехода на следующий год обучения. Другой пример – группа служащих, одновременно принятых на работу. Для этой когорты можно проследить продвижение по службе, средний стаж работы на предприятии и др. Как мы видим, когортный анализ можно (и нужно) использовать за пределами собственно демографического анализа.

Иммиграцию можно рассматривать как особый процесс, *добавляющий* население к исходной численности.

В другом случае демограф может интересоваться изменением численности и структуры населения из года в год, факторы и компоненты этого изменения. Поскольку население при таком подходе рассматривается по календарным периодам (чаще всего – по годам), в полученный «срез» попадают части отдельных поколений, говорят о формировании некоторого *условного поколения*. На демографической сетке анализируемые события и совокупности индивидов будут находиться в вертикальном «коридоре», ограниченном линиями, соответствующими началу и концу изучаемого периода, то есть линиями, пересекающими линии жизни. Этот подход получил название поперечного анализа<sup>12</sup>.

#### 1.2.2. Основные принципы поперечного анализа

При использовании метода поперечного анализа мы имеем дело с «мгновенной фотографией» всего населения, и на полученной таким образом картинке отражаются отдельные «кусочки» различных реальных поколений. Как видно на рис. 1.4, в «коридор», относящийся к 1997 году, попадают параллелограммы, принадлежащие к разным поколениям. Поэтому сформированное таким образом поколение называют условным.

«Условное, гипотетическое поколение – это условная совокупность людей, на протяжении жизни которой [...] интенсивность демографического процесса в каждом возрасте соответствует существующей в данный календарный период»<sup>13</sup>. Поэтому демографические показатели, рассчитанные для конкретного года, будут зависеть от характеристик демографических процессов *во всех одновременно живущих реальных поколениях*. Эти показатели будут отражать не глубинные тенденции демографических процессов, как это происходит при рассмотрении реальных поколений, а особенности процессов, характерные для данного

<sup>12</sup> Во французском языке – «analyse transversale», в английском – «cross-sectional analysis».

<sup>13</sup> Народонаселение. Энциклопедический словарь. Стр. 82

календарного периода (года). Поэтому поперечный анализ также называют конъюнктурным анализом.

Перед поперечным анализом стоят две основные задачи:

1. Первая задача заключается в разделении влияния на число демографических событий интенсивности демографического процесса и структуры населения. Для решения этой задачи часто используется стандартизация демографических показателей, хотя существуют и другие методы<sup>14</sup>, анализ которых выходит за рамки данного учебника.
2. Вторая задача состоит в оценке уровня и календаря демографических процессов на основе показателей, рассчитанных для данного периода. Эта задача решается использованием метода условного поколения и преобразованием когортных показателей в показатели для календарного периода.

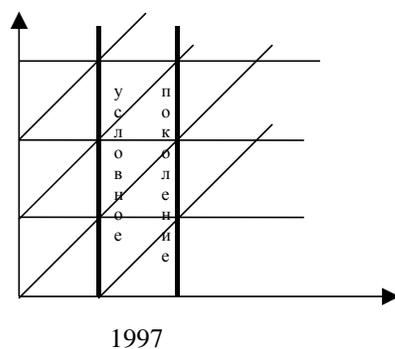


Рис. 1.4 Условное поколение на демографической сетке

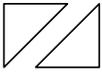
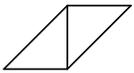
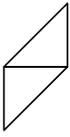
Часто бывает достаточно нанести совокупности событий на демографическую сетку для того, чтобы определить, какой вид анализа можно использовать, продольный или поперечный (см. табл. 1.1).

Продольный и поперечный подходы в демографическом анализе не исключают, а взаимодополняют друг друга. Некоторые изменения в численности населения могут быть вызваны конъюнктурными событиями; влияние этих событий и факторов выявляется при помощи поперечного подхода. Другие

<sup>14</sup> См., например: G. Wunsch, M. Termot Introduction to demographic analysis, 1974

изменения связаны с долговременными модификациями демографического поведения, которые можно обнаружить при использовании продольного анализа.

Таблица 1.1. Использование совокупностей событий в демографическом анализе

Совокупности событий	Временные координаты событий	Локализация событий	Возможные методы анализа
Элементарные совокупности	- год смерти - поколение - возраст смерти		- продольный - поперечный
1 <sup>я</sup> совокупность	- поколение - возраст смерти		- продольный
2 <sup>я</sup> совокупность	- год смерти - поколение		- продольный
3 <sup>я</sup> совокупность	- год смерти - возраст смерти		- поперечный

**ЗАДАЧИ***Задача 1<sup>15</sup>*

Нанесите на демографическую сетку следующие данные, при условии, что миграция отсутствует:

Численность поколения 1960 года рождения при рождении	4000 человек
Из поколения 1960 г. умерли в 1960 г. в возрасте 0 исполнившихся лет	200 человек
Численность поколения в возрасте 0 исполнившихся лет на 1 января 1961 г.	3800 человек
Из поколения 1960 г. умерли в 1961 г. в возрасте 0 исполнившихся лет	100 человек
Из поколения 1960 г. дожили до первого дня рождения	3700 человек
Из поколения 1960 г. умерли в 1961 г. в возрасте 1 исполнившегося года	40 человек
Численность поколения в возрасте 1 год на 1 января 1962 г.	3660 человек
Из поколения 1959 г. умерли в 1961 г. в возрасте 1 исполнившегося года	30 человек
Дожившие до точного возраста 2 года из поколения 1959 г.	3000 человек

*Задача 2<sup>16</sup>*

<sup>15</sup> Roussel L., Gani L., Girard A. Analyse Démographique. Exercices et problèmes. Paris.

<sup>16</sup> Franck Cadier C. Démographie. Tome 1. – Paris: Economica, 1990 Pp. 21 – 22

Представим закрытое население, в котором отсутствует миграция. В этом населении рассмотрим смерти, наступившие между 1 января 1984 г. и 1 января 1988 г. в интервале точного возраста 0-4 года.

1) Нарисуйте демографическую сетку, соответствующую этому исследованию.

2) Рассмотрим поколение 1984 года рождения. Для этого поколения мы располагаем данными о числах умерших  $D_{x,t}$ , распределенных по возрасту ( $x$  исполнившихся лет) и году смерти ( $t$ ):

$$D_{0,1984}=280$$

$$D_{0,1985}=162$$

$$D_{1,1985}=75$$

$$D_{1,1986}=51$$

$$D_{2,1986}=27$$

$$D_{2,1987}=27$$

$$D_{3,1987}=22$$

а) Нанесите эти данные на демографическую сетку.

б) В 1984 году родилось 30000 детей. Нанесите эту информацию на сетку. Отнимите от числа родившихся числа умерших к концу каждого года и к каждому точному возрасту и нанесите полученные результаты на демографическую сетку.

в) Рассчитайте общее количество умерших в возрасте 0 исполнившихся лет, а также число умерших в 1987 году.

3) Рассмотрим поколение 1985 года рождения. В точном возрасте «1 год» это поколение насчитывало 28995 человек. В возрасте 0 исполнившихся лет умерло 430 человек из этого поколения, в возрасте 1 исполнившегося года умерло 115 человек. Нанесите эту информацию на демографическую сетку и рассчитайте исходную численность поколения 1985 года рождения.

4) Рассмотрим поколение 1982 года рождения. Его численность на

1 января 1984 г. составила 296500 человек;

1 января 1985 г. – 29570 человек;

1 января 1986 г. – 29518 человек.

Нанесите эту информацию на сетку, рассчитайте числа умерших в 1984 и 1985 гг. и также укажите их на графике.

5) Какой метод анализа Вы использовали в этой задаче: продольный или поперечный?

### Задача 3

Нанесите на демографическую сетку данные о детях до 5 лет, умерших в 1997 году в Москве:

Возраст, лет	Год рождения	Мужчины	Женщины
до 1 года	1997	504	333
	1996	68	70
1 год	1996	17	24
	1995	19	23
2 года	1995	17	9
	1994	11	8
3 года	1994	9	12
	1993	7	4
4 года	1993	8	5
	1992	11	10

Если бы Вам была известна численность соответствующих поколений, какие показатели Вы могли бы рассчитать?

### Задача 4. Анализ младенческой смертности по месяцам<sup>17</sup>

В некоторой стране смерти до года, наступившие в 1968 году, распределены в зависимости от возраста смерти следующим образом:

возраст смерти (исполнившихся месяцев)	числа умерших
0	5000
1	600
2	550
3	500
4	400
5	350

<sup>17</sup> Roussell L., Gani L. et Girard A., Analyse Démographique. Exercices et problèmes, Librairie A. Colin, Paris, 1973. – pp. 41 – 42

6	300
7	200
8	200
9	100
10	100
11	100

1) Нанесите эти данные на демографическую сетку.

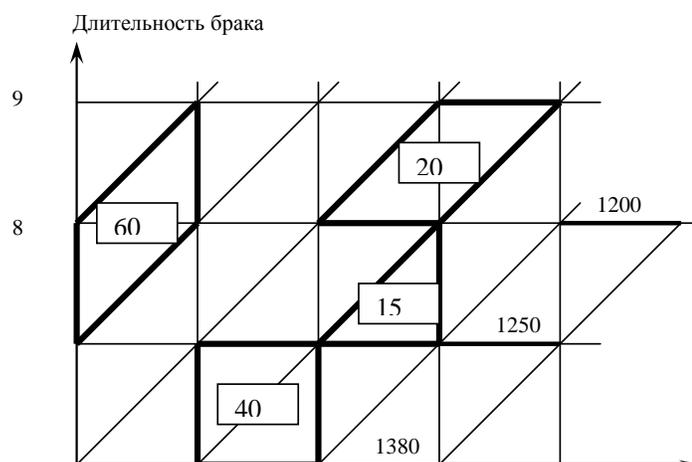
2) Определите при помощи демографической сетки период, в течение которого родились 400 детей, умерших в 1968 году в возрасте 4-х исполнившихся месяцев. Предположив, что длина каждого месяца равна  $1/12$  года, укажите точно день, месяц и год начала и конца этого периода.

3) Рассчитайте наиболее грубый показатель младенческой смертности с учетом числа рождений 1968 года, равного 206000 (воспользуйтесь материалами Раздела 4).

4) Известно, что 2350 детей, умерших в 1968 году, родились в 1967 году. В 1967 году было зарегистрировано 210000 рождений. Рассчитайте коэффициент младенческой смертности с учетом этих данных. Сравните с результатом, полученным в п. 3), и прокомментируйте разницу.

#### Задача 5

Мы изучаем разводы в брачных когортах. Дайте название всем совокупностям, обозначенным на рисунке. Какие из этих совокупностей можно использовать в продольном анализе? Какие совокупности можно использовать в поперечном анализе? Рассчитайте число разводов с длительностью брака 6 и 7 исполнившихся лет в брачной когорте 1999 года.



7

6

*Задача 6*

В детском саду на 1 декабря по списку было 250 детей. После начала эпидемии гриппа утром 2 декабря пришло 225 детей, утром 3 декабря – 200 детей, утром 4 декабря – 180 детей, утром 5 декабря – 160 детей. Никто из заболевших не вернулся в детский сад до 6 декабря, а утром 6 декабря вернулись все болевшие дети.

Предположив, что за это время в детский сад никого не принимали и никто не уходил из него по другим причинам, нанесите эти данные на демографическую сетку и рассчитайте:

- 1) численность заболевавших ежедневно
- 2) число отсутствующих в детском саду на начало каждого дня
- 3) число детей, проболевших 1, 2, 3, 4, 5 дней
- 4) приняв гипотезу равномерного распределения заболевших в течение дня, рассчитайте среднюю длительность болезни

*Задача 7. Ошибки анамнестического обследования*

Одновременно с переписью населения проводится выборочное обследование. Опрашиваемым задаются вопросы об их «миграционной истории» (длительность проживания в данном месте жительства, место рождения и пр.) С какими ошибками в данных можно столкнуться при таком обследовании?

*Задача 8*

Мы анализируем браки одиноких в поколении 1970 года рождения (см. таблицу).

Точный возраст	Численность одиноких	Число браков при переходе к следующему возрасту
21	1500	120
22	1340	60
23	1270	150
24	1110	60
25	1060	40

- 1) Нанесите эти данные на демографическую сетку. В какие годы заключены эти браки?
- 2) Какие еще процессы могут выступать «помехой» при изучении процесса брачности? На основе каких данных Вы можете утверждать, что в данном примере эти процессы «вмешиваются» в процесс заключения первых браков?

#### Задача 9

Мы изучаем разводимость в когорте первых браков, заключенных в 1980 году. Нанесите данные таблицы на демографическую сетку и дайте ответы на следующие вопросы, предположив, что миграция и смертность не являются помехами для изучения данного процесса:

- 1) Сколько разводов было зарегистрировано в зависимости от продолжительности брака (в исполнившихся годах)?
- 2) В какие календарные годы были зарегистрированы эти разводы?
- 3) Предположив, что число разводов меняется линейно в течение года, рассчитайте количество разводов в данной брачной когорте в каждом календарном году.

Длительность брака (точных лет)	Численность браков
5	1320
6	1280
7	1210
8	1160
9	1100

10	1030
----	------

**Задача 10**

В таблице приведены числа первых браков женщин в Москве в зависимости от года регистрации брака и возраста вступления в брак:

Возраст, исполнившихся лет	Год регистрации первого брака				
	1983	1984	1985	1986	1987
20	3723	8067	7513	7440	7575
21	8931	8203	7712	7182	7145
22	10373	6999	6729	6397	6131
23	8219	5435	5473	5180	5063
24	6284	4259	4267	4311	4327

- 1) Нанесите эти данные на демографическую сетку
- 2) Определите, к каким поколениям (по году рождения) принадлежат эти женщины, вступившие в брак. Определите, между какими точными датами они родились.
- 3) Какие процессы могут выступать в качестве «помех» при изучении вступления в первый брак в реальных поколениях?
- 4) Приняв гипотезы отсутствия «помех» и линейного распределения первых браков, рассчитайте числа первых браков в поколениях в зависимости от возраста вступления в первый брак.

**Задача 11**

В таблице представлена информация о разводах, зарегистрированных мужчинами в Москве в 1983 году, распределенных по возрасту и длительности брака:

Возрастные группы	Длительность брака		
	5 – 9 лет	10 – 14 лет	15 – 19 лет
20 – 24	427	228	-
25 – 29	4362	75	-
30 – 34	4431	2081	49
35 – 39	1769	2494	772
40 – 44	912	1014	1527

- 1) Нанесите эту информацию на демографическую сетку

- 2) К каким брачным когортам относятся эти разводы?
- 3) Приняв гипотезы об отсутствии миграции и овдовения, а также предположив, что разводы распределены линейно, рассчитайте в каждой брачной когорте числа разводов в зависимости от возраста и длительности брака.

*Задача 12. Анализ младенческой смертности по дням и месяцам*

На основе информации, содержащейся в Форме 4а (рис. 1.4.), проанализируйте особенности младенческой смертности в Москве в 1956 году:

- нанесите данные на демографическую сетку;
- рассчитайте все возможные показатели младенческой смертности (используйте для этого материалы Раздела 4).

Форма 4а. Сведения об умерших в возрасте до 1 года по полу, количеству прожитых дней и месяцев и календарным месяцам смерти и рождения.  
(1956 г., мальчики)

месяцы смерти и рождения возраст и месяцы рождения	до 1 м. 1 м. 2 м. 3 м. 4 м. 5 м. 6 м. 7 м. 8 м. 9 м. 10 м. 11 м.											итого	итого по диагонали	
	дек	ноя	окт	сен	авг	июл	июн	май	апр	мар	фев			январь
январь	13	3	2	3	4	4	2	2	1	1	2	0	154	0
февраль	84	6	3	6	0	6	6	3	0	1	2	0	146	3
март	68	8	6	5	3	5	3	4	2	1	0	0	152	4
апрель	85	2	5	7	3	3	2	1	1	2	2	0	134	5
май	15	4	4	4	2	0	1	1	0	0	3	1	124	14
июнь	67	4	4	5	3	6	3	3	3	0	0	1	96	13
июль	7	6	5	0	3	4	2	0	0	0	2	2	93	21
август	64	6	7	3	1	2	6	1	3	0	0	0	80	26
сентябрь	56	3	3	5	1	1	1	1	1	0	0	0	111	25
октябрь	7	2	1	4	0	2	1	1	0	0	0	0	109	41
ноябрь	53	6	5	5	2	1	1	1	0	0	0	1	113	46
декабрь	23	5	1	4	10	2	5	0	0	0	1	1	96	59
итого	8	3	2	0	1	1	1	1	3	0	1	0	111	25
итого по диагонали	56	4	2	6	4	6	7	2	1	0	1	1	109	41
	40	6	5	6	4	4	2	2	0	1	0	0	113	46
	47	6	8	6	3	5	3	2	0	1	1	0	113	46
	4	0	5	5	3	4	2	2	3	1	1	1	113	46
	4	7	1	3	4	2	1	0	0	1	2	0	96	59
	44	1	3	3	2	1	6	4	4	2	1	0	96	59
итого	789	102	94	102	74	70	63	37	26	14	23	14	1408	257
итого по диагонали	44	52	60	85	60	93	110	108	124	157	118	140	1151	

Из числа умерших до 1 года умерли в возрасте:

до 1 дня	1 день	2 дня	3 дня	4 дня	5 дней	6 дней	7-9	10-13	14-19	20	21-29	итого	неизв. количество дней до 1 мес.
333	150	78	37	20	15	12	39	30	28	3	44	789	-

Рис. 1.4.

**Задача 15**

В таблице приведено распределение разводов в Армении по длительности брака и году развода. Предположив, что разводы распределены равномерно в течение года и в пятилетних интервалах по длительности брака, нанесите эти данные на демографическую сетку. К каким брачным когортам относятся эти разводы? Определите количество разводов в каждой брачной когорте и распределите эти разводы по длительности брака и по годам, в которые были зарегистрированы разводы.

Длительность брака	Годы регистрации развода									
	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
0 – 4 года	576	451	368	270	175	204	245	254	260	308
5 – 9 лет	721	738	642	420	316	298	378	328	350	343
10 – 14 лет	501	541	524	366	283	288	418	404	411	452
15 – 19 лет	437	429	409	275	222	259	369	293	354	361

*Источник: Национальная статистическая служба Республики Армении*

### 1.3. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНТЕНСИВНОСТИ И КАЛЕНДАРЯ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.

Демографический процесс (от лат. *processus* – продвижение) – последовательность одноименных событий в жизни людей, имеющая значение для смены поколений (воспроизводства населения)<sup>18</sup>. Все демографические процессы можно разделить на три группы (см. рис. 1.5). При выборе показателей, характеризующих тот или демографический процесс, необходимо обращать внимание на специфику данного процесса.

<sup>18</sup> Демографический энциклопедический словарь. – М.: «Советская энциклопедия», 1985. – Стр. 354



\* Строго говоря, миграцию нельзя отнести к демографическим процессам, поскольку она не воздействует напрямую на воспроизводство населения или смену поколений. Но поскольку миграция часто выступает в качестве так называемой «помехи» при изучении демографических процессов, а также играет существенную роль в изучении демографического роста, процессы эмиграции и иммиграции присутствуют в данной схеме наряду с демографическими процессами в полном смысле слова.

Рис. 1.5

Любой демографический процесс характеризуется интенсивностью<sup>19</sup> и календарем. Интенсивность демографического процесса отражает взаимосвязь между числом событий в когорте, численностью самой когорты и временным интервалом, в течение которого эти события наступают.

Для характеристики интенсивности демографического процесса используют следующие показатели: 1) вероятности наступления событий; 2) коэффициенты, 3) приведенные числа событий.

Вероятность наступления демографического события – «относительная величина, характеризующая возможность наступления данного события для одного человека при условии, что все люди из данной когорты в равной мере подвержены риску этого события»<sup>20</sup>. *Вероятность наступления события в возрастном интервале рассчитывается как отношение числа событий в*

<sup>19</sup> Иногда наряду с понятием «интенсивности демографического процесса» говорят об «уровне демографического процесса».

<sup>20</sup> Народнонаселение. Энциклопедический словарь. – М.: Большая Российская Энциклопедия, 1994. – Стр. 42

данном интервале к численности той части когорты в начале интервала, для которой изучаемое событие еще не наступило. Например, если изучается вероятность вступления в первый брак, то необходимо разделить число браков в возрастном интервале на численность незамужних (неженатых) в начале интервала.

Пример: рассчитаем вероятность вступления в брак в интервале возраста от 15 до 16 лет. В точном возрасте 15 лет когорта состоит из 600 незамужних женщин. В возрасте 15 исполнившихся лет (то есть при переходе от точного возраста 15 лет к точному возрасту 16 лет) в этой когорте было зарегистрировано 60 первых браков. Чтобы получить вероятность вступления в первый брак в возрасте 15 исполнившихся лет, необходимо разделить число первых браков на численность когорты в начале интервала:

$$60/600=1/10$$

В общем виде формула вероятности может быть записана следующим образом:

$$q_x(k) = \frac{e_x(k)}{N_x(k-1)},$$

где:

$q_x(k)$  – вероятность наступления события очередности  $k$  в возрасте  $x$  исполнившихся лет, то есть при переходе от точного возраста  $x$  к точному возрасту  $x+1$ ;

$e_x(k)$  – число событий очередности  $k$  в интервале возраста от  $x$  до  $x+1$ ;

$N_x(k-1)$  – численность членов когорты в начале интервала, для которых событие  $e(k)$  еще не наступило.

При изучении вероятностей наступления демографических событий необходимо помнить о том, что их величина зависит от длины интервала: чем длиннее интервал, тем выше вероятность наступления изучаемого события. Следовательно, можно сравнивать вероятности, относящиеся только к одинаковым временным интервалам. Чтобы сравнить интенсивности

демографического процесса на разных интервалах времени, нужно сравнивать не вероятности, а коэффициенты.

Исходная численность когорты может уменьшаться не только под влиянием изучаемого процесса. Например, мы изучаем смертность в поколении, а «помехой» выступает миграция. В этом случае мы имеем дело с «зависимой» вероятностью, зависимой не только от числа смертей в единицу времени, но и от числа миграций. Чтобы получить характеристики интенсивности смертности в чистом виде, т.е. независимо от влияния миграции, рассчитывают так называемую независимую, или чистую, вероятность. Более подробно речь об этом пойдет в Разделе 8.

*Таблица единственного выбытия* используется для анализа распределения неповторяющихся событий в когорте.

Если для некоторого временного интервала нам известны все вероятности выбытия  $q_x = e_x / N_x$ , то, используя следующий алгоритм, можно построить таблицу, показывающую распределение неповторяющихся событий в изучаемой когорте:

$$\begin{cases} e_x = N_x \cdot q_x \\ N_x - e_x = N_{x+1} \end{cases}$$

Таким образом, мы получаем три основных распределения таблицы:

1.  $N_x$ , распределение чисел «доживающих» до точного возраста  $x$ , то есть численность индивидов в точном «возрасте»  $x$ , для которых изучаемое неповторяющееся событие еще не наступило;
2. распределение вероятностей  $q_x$  наступления изучаемого события между точными «возрастами»  $x$  и  $x+1$  (или в «возрасте»  $x$  исполнившихся лет);
3. распределение неповторяющихся событий  $e_x$ , наступивших в интервале «возраста»  $x$  исполнившихся лет.

Еще одно распределение выводится из предыдущих. Это вероятность  $p_x$ , означающая, что изучаемое событие в данном интервале возраста не наступает. Оно рассчитывается как дополнение до единицы вероятности  $q_x$ :

$$p_x = 1 - q_x.$$

Таблица единственного выбытия наиболее часто используется в демографии для анализа процесса смертности (методы построения и анализа таблиц смертности приведены в Разделе 3). Таблицы единственного выбытия можно строить также при изучении любых других, помимо смертей, неповторяющихся событий: например, при анализе первых рождений или первых браков.

Коэффициенты интенсивности демографических процессов – «среднее значение силы демографического процесса в данном интервале времени, взвешенное временем, прожитым всей когортой в данном интервале времени, например, числом человеко-лет, прожитых в этом интервале»<sup>21</sup>.

Любой демографический коэффициент рассчитывается как отношение числа событий  $e_x$ , наступивших в интервале «возраста»  $x$  исполнившихся лет, к числу человеко-лет, прожитых в интервале возраста от  $x$  до  $x+1$  теми, для кого изучаемое событие еще не наступило. В отличие от вероятности, в формуле коэффициента число событий в интервале относится не к численности когорты в начале интервала, а ко времени, прожитому в данном интервале всеми членами когорты, дожившими до его начала, для которых не наступило изучаемое событие.

При расчете коэффициентов на первый план выходит проблема знаменателя, поскольку нам необходимо соотнести число некоторых событий в населении, составляющих числитель, с тем населением в знаменателе, в котором эти события произошли. Собственно, вся система коэффициентов строится на основе перехода к знаменателям, в большей степени отражающим население, причастное к наступлению изучаемых событий.

В общем виде коэффициент представляет собой число демографических событий в наблюдаемом календарном периоде, отнесенное к среднему числу человеко-лет, прожитых в данном периоде всеми индивидами, составляющими изучаемое население. Общие коэффициенты измеряются в промилле (‰), то есть в расчете на тысячу человек данного населения.

Пусть  $t$  – коэффициент, который нужно рассчитать,  $e$  – число демографических событий,  $\bar{P}$  – средняя численность населения за период,  $T$  –

---

<sup>21</sup> Народнонаселение. Энциклопедический словарь. Стр. 155

длительность наблюдаемого периода. Произведение  $\bar{P} \cdot T$  и представляет собой среднее число человеко-лет, прожитых населением в данном временном интервале. Тогда коэффициент в общем виде можно рассчитать по формуле:

$$t = \frac{e}{\bar{P} \cdot T} \cdot 1000.$$

Среднюю численность населения или среднее население обычно рассчитывают, используя формулу средней арифметической<sup>22</sup>. Если численность населения в течение года колеблется незначительно, то можно ограничиться полусуммой начальной и конечной численности населения (например, на 1 января и 31 декабря). В том случае, если численность населения региона существенно различается по месяцам или сезонам, среднее население может быть рассчитано как сумма ежемесячных численностей населения, отнесенная к числу месяцев.

Как правило, коэффициенты рассчитываются приведенными к году, то есть за календарный период, равный одному году (при  $T=1$ ).

Различают несколько видов демографических коэффициентов, характеризующих интенсивность демографических процессов: общие коэффициенты, специальные и повозрастные коэффициенты, суммарные коэффициенты. Принято говорить о системе демографических коэффициентов, отражающих интенсивность того или иного демографического процесса с большей или меньшей степенью точности.

Общий коэффициент показывает среднее число демографических событий, приходящееся на среднее число человеко-лет, прожитых в течение одного года изучаемым населением.

Если  $B$  – число браков в населении в течение года,  $\bar{P}$  – средняя численность населения,  $b$  – общий коэффициент брачности, то

$$b = \frac{B}{\bar{P} \cdot T} \cdot 1000.$$

---

<sup>22</sup> При этом мы принимаем гипотезу о том, что численность населения меняется линейно в течение изучаемого периода времени.

Поскольку все события, наступившие в населении в течение года, относят к средней численности населения, можно говорить о том, что общие коэффициенты не зависят от влияния общей численности населения.

В знаменателе общего коэффициента брачности представлено все население, хотя в брак могут вступать только люди, достигшие установленного законом брачного возраста, и при этом не состоящие в браке, то есть бракоспособное население. Поэтому следующим шагом будет расчет специального коэффициента брачности, знаменатель которого более точно отражает то население, которое вступает в брак.

Специальный коэффициент представляет собой отношение числа зарегистрированных в течение года событий к среднему числу человеко-лет, прожитых в течение того же года населением, способным продуцировать эти события. Например, специальный коэффициент брачности представляет собой отношение числа зарегистрированных браков к средней численности бракоспособного населения (населения, достигшего брачного возраста и не состоящего в браке):

$$b_{\text{спец}} = \frac{B}{P_{\text{бракосп}} \cdot T} \cdot 1000$$

Аналогично рассчитывается специальный коэффициент рождаемости: среднее число детей, рожденных женщинами в репродуктивном возрасте за прожитый год.

Специальный коэффициент элиминирует, таким образом, не только влияние общей численности населения, но и частично – влияние структуры населения, так как в знаменателе находится только то население, которое может продуцировать демографические события. Специальный коэффициент брачности можно рассчитывать также отдельно для мужчин и женщин.

В то же время нам известно, что в брак вступают преимущественно молодые люди. Поэтому можно предположить, что чем больше в населении пожилых, тем ниже будет коэффициент брачности. Чтобы избавиться от воздействия возрастной

структуры на уровень демографического процесса, рассчитываются возрастные коэффициенты.

Возрастные коэффициенты представляют собой отношение числа демографических событий наступивших в течение года у индивидов определенного возраста  $x$ , к числу человеко-лет, прожитых данной возрастной группой<sup>23</sup> в том же году.

Так, возрастной коэффициент брачности женщин показывает среднее число браков в течение прожитого года у женщин в возрасте  $x$ :

$$b_x = \frac{B_x}{P_x^f \cdot T} \cdot 1000$$

Возрастные коэффициенты дают возможность измерить интенсивность демографического процесса независимо от воздействия возрастной структуры. Когда возрастные коэффициенты рассчитываются для однолетних возрастных интервалов, влияние возрастной структуры можно считать полностью устраненным, так как предполагается, что в течение одного года жизни демографические события распределены равномерно<sup>24</sup>. Если коэффициенты рассчитывают для пятилетних или десятилетних возрастных групп, определенное влияние возрастной структуры может сохраняться.

Числители у возрастных коэффициентов и вероятностей одинаковые. Различаются только знаменатели. В общем виде формула возрастного коэффициента может быть записана следующим образом:

$$t_x = \frac{e_x(k)}{N_{x+0,5}(k-1)}$$

при условии равномерного распределения событий в

интервале. Где

$e_x(k)$  – число событий очередности  $k$  в данном возрастном интервале;

$N_{x+0,5}(k-1)$  – число человеко-лет, прожитых в данном интервале теми, для кого событие  $k$  еще не наступило.

<sup>23</sup> Возрастные группы могут быть однолетними, пятилетними и др. в зависимости от исходных данных и целей исследования.

<sup>24</sup> Напомним, что при изучении смертности это допущение неприменимо. В течение первого года жизни в экономически развитых странах младенческая смертность сконцентрирована на первой неделе и первом месяце жизни.

Если события распределены в интервале неравномерно, то эта формула даст лишь приближенное значение коэффициента. Когда интервал не слишком велик, можно считать, что события распределены в интервале равномерно. Исключение составляет младенческая смертность и смертность в пожилых возрастах.

Соотношение между возрастными коэффициентами и вероятностями

И коэффициенты, и вероятности используются для характеристики интенсивности демографических процессов в когорте. Тем не менее, надо принимать во внимание, что расчет этих показателей приводит к разным числовым результатам. Эти различия вытекают из определения и формы расчета показателей. Покажем разницу на примере. Рассмотрим поколение женщин, в котором наступают только первые браки. Предположим, что смертность и миграция отсутствуют, а события в возрастных интервалах распределены равномерно.

$M_x$  – число первых браков в возрасте  $x$  исполнившихся лет;

$N_x, N_{x+1}$  – число незамужних женщин в точных возрастах  $x$  и  $x+1$ ;

Для этого поколения женщин в данном интервале мы можем рассчитать:

$n_x = \frac{M_x}{N_x}$  – вероятность вступить в 1<sup>й</sup> брак в интервале точного возраста от  $x$

до  $x+1$

$t_x = \frac{M_x}{N_{x+0.5}}$  – коэффициент первых браков в возрасте  $x$  исполнившихся лет,

при условии, что браки равномерно распределены в интервале возраста от  $x$  до  $x+1$ .

В нашем примере длина интервала равна одному году. Если интервал более длинный (5 или 10 лет), то следует помнить, что коэффициент не зависит от длины интервала, и, напротив, чем длиннее интервал, тем будет больше значение вероятности вступления в первый брак.

Расчет возрастных коэффициентов ставит нас перед необходимостью иметь дело с большим количеством чисел. В то же время для сравнений удобно пользоваться одним единственным числом. Как мы уже видели, общий и

специальный коэффициент непригодны для сравнений, так как зависят от воздействия структуры населения. Суммарный коэффициент в одном числе обобщает информацию, содержащуюся в коэффициентах, не завися при этом от возрастной структуры.

Суммарные коэффициенты показывают, сколько в среднем событий приходится на одного члена когорты за все время ее существования. Например, суммарный коэффициент первых браков показывает, сколько в среднем первых браков пришлось на одного члена реальной когорты или сколько в среднем первых браков пришлось на одного члена условной когорты при условии сохранения повозрастных показателей брачности, существовавших в данном календарном году, на протяжении всего срока жизни данной условной когорты. Суммарные коэффициенты рассчитываются как сумма возрастных коэффициентов с учетом длины возрастного интервала. Например, суммарный коэффициент брачности можно рассчитать следующим образом:

$$b_{\text{сум}} = n \sum_x b_x,$$

где  $b_{\text{сум}}$  – суммарный коэффициент брачности;

$n$  – длина возрастного интервала;

$b_x$  – повозрастные коэффициенты брачности.

Расчет и использование суммарных коэффициентов может таить в себе и определенные ловушки. Поскольку суммарные коэффициенты можно рассчитывать как для условного поколения (показатели итоговой рождаемости или итоговой брачности поколения) так и для условного поколения, то, например, возникает иллюзия того, что коэффициент суммарной рождаемости календарного периода можно интерпретировать как показатель интенсивности процесса рождаемости в реальных поколениях, не упоминая об его подверженности конъюнктурным колебаниям. Тем не менее, нельзя считать, что уровень демографического процесса, рассчитанный на основе условного поколения, идентичен реальной интенсивности демографического процесса, поскольку условное поколение состоит из частей реальных поколений, и интенсивность

демографического процесса в условном поколении зависит от возрастных интенсивностей этого процесса и его календаря в реальных поколениях. Например, значения коэффициента суммарной рождаемости могут заметно колебаться от года к году, а показатель исчерпанной рождаемости в реальных поколениях при этом практически не будет меняться.

Приведенные числа событий рассчитываются как отношение числа событий, наступивших в интервале возраста, к исходной численности когорты. Приведенные числа событий имеют смысл только для повторяющихся событий, когда наступление события не исключает индивида из наблюдаемой когорты.

*Пример:* если  $M_x$  – число браков, зарегистрированных в возрасте  $x$  исполнившихся лет,  $N$  – исходная численность поколения, то приведенное число событий в возрасте  $x$  лет будет рассчитываться как  $M_x/N$ .

Показатели календаря демографического процесса характеризуют распределение демографических событий в зависимости от времени, истекшего с момента формирования данной когорты. Например, распределение рождений по возрасту матери или по длительности брака, распределение разводов по длительности брака и др. Календарь процесса можно измерить с помощью среднего интервала времени между событиями. В общем виде формула среднего интервала между событиями выглядит следующим образом<sup>25</sup>:

$$\bar{i} = \frac{\sum_{\alpha}^{\beta} i \cdot e_i}{\sum_{\alpha}^{\beta} e_i},$$

где:

$\bar{i}$  – средний интервал между событиями;

$i$  – интервал времени между исходным событием и событием  $e_i$ .

<sup>25</sup> Как правило, предполагается, что в интервале времени события распределены равномерно, то есть на 1/2 интервала приходится ровно половина всех событий, на 1/4 – четвертая часть и т.д. Это допущение можно использовать почти всегда, за исключением ранних детских и поздних пожилых возрастов при изучении смертности. Также необходимо помнить, что по мере увеличения интервала допускать равномерность распределения событий в интервале нужно с большой осторожностью.

Любой демографический процесс можно охарактеризовать одними и теми же показателями, отражающими его интенсивность (вероятности, коэффициенты, приведенные числа событий) и календарь. Однако для анализа отдельных процессов используются и специфические показатели. Особенности их расчета и анализа приводятся в соответствующих разделах.

### **ЗАДАЧИ**

*Задача 1. Сравнение абсолютного числа смертей и общих коэффициентов смертности в России в 1926 и 1996 гг.*

В таблице приведены сведения о числе смертей и средней численности населения России в 1926 и 1996 годах. Рассчитайте общие коэффициенты смертности для этих лет и поясните, чем обусловлено изменение показателя. Почему нельзя сравнивать интенсивность смертности двух разных лет на основе абсолютного числа смертей?

Показатели:	1926	1996
Число смертей	1920 тыс.	2082,2 тыс.
Численность населения (на начало года)	92735 тыс.	147976 тыс.
Общий коэффициент смертности		

*Задача 2. Расчет общих коэффициентов*

Во Франции в 1969 году было зарегистрировано 570 тыс. смертей. Численность населения на 1 января 1969 г. составила 50105 тыс. человек; на 31 декабря 1969 г. – 50524 тыс. человек. Рассчитайте общий коэффициент смертности для 1969 года. Что показывает этот коэффициент? Можно ли утверждать, что его значение отражает реальный уровень смертности? Почему?

*Задача 3.*

На основе данных, приведенных в таблице 2 Приложения 1, рассчитайте общие коэффициенты рождаемости, смертности и естественного прироста населения России в 1960 – 2004 гг. (Численность населения в таблице приведена на 1 января соответствующего года.) Нанесите полученные коэффициенты на график и

проанализируйте их динамику. Какими факторами обусловлены обнаруженные Вами тенденции?

*Задача 4. Преобразование возрастных коэффициентов смертности в вероятности умереть*

В таблице приведены коэффициенты смертности для развивающейся страны по полу и возрасту, в %:

возраст, исполнившихся лет	мужчины	женщины	возраст, исполнившихся лет	мужчины	женщины
0	72,6	59,2	45-49	9,4	6,0
1-4	7,9	8,4	50-54	17,8	10,8
5-9	1,6	1,7	55-59	25,6	16,9
10-14	1,3	0,9	60-64	41,0	26,9
15-19	1,5	2,2	65-69	62,5	33,4
20-24	1,7	3,4	70-74	79,2	62,9
25-29	2,2	3,5	75-79	116,8	73,9
30-34	2,7	4,3	80-84	195,0	141,8
35-39	3,5	4,5	80+	300,0	486,7
40-44	6,2	5,5			

1) На основе коэффициентов рассчитайте для каждого пола вероятности умереть на основе экспоненциальной формулы  ${}_n q_x = 1 - e^{-n \cdot t_x}$ .

Изобразите эти вероятности на графике, используя логарифмическую шкалу, и прокомментируйте.

2) Постройте таблицу смертности для каждого пола, ограничившись числами доживающих и числами умирающих.

3) Используя классическую формулу средней, рассчитайте среднюю продолжительность жизни мужчины и женщины в данной стране. Покажите, что в таблице смертности средняя продолжительность жизни равна среднему возрасту смерти.

Примечание: для решения задачи используйте также материалы Раздела 4.

*Задача 5.*<sup>26</sup>

Мы располагаем численностями больных мужчин и женщин на 31 декабря 1990 года, а также средними числами умерших в этих совокупностях в 1990 и 1991 гг. в возрастных группах больных:

Возрастные группы	Мужчины		Женщины	
	Численность	Умершие	Численность	Умершие
15 – 19	310	2	460	8
20 – 24	297	3	455	11
25 – 29	281	3	450	11
30 – 34	264	4	444	12
35 – 39	246	4	437	15
40 – 44	225	4	428	21
45 – 49	203	5	415	30
50 – 54	178	5	397	43

- 1) Сравните смертность мужчин и женщин
- 2) Оцените число больных мужчин и женщин, живущих на 31 декабря 2000 года и относящихся к поколениям 1971 – 1975 гг. рождения. Предположите, что между 1990 и 2000 гг. смертность не меняется.

*Задача 6.*

На основе данных, представленных в таблице, рассчитайте для населения Франции общие коэффициенты и прокомментируйте их динамику.

годы	Численность населения на 1 июля, тыс.	Браки, тыс.	Живорождения, тыс.	Умершие, тыс.	Сальдо миграции, тыс.
1980	53880	334	800	547	+44
1985	55284	269	768	552	+38
1990	56709	287	762	526	+80
1995	57844	255	730	532	+40
2000	59013	298	775	531	+70
2005*	60873	272	775	527	+95

\* Предварительные результаты

Источник: данные INSEE

<sup>26</sup> A. Nombissi Principes et méthodes d'analyse démographique. Travaux dirigés. – Université Catholique de Louvain ; année académique 1995 – 1996

**Задача 7.**

На основе распределения мужского населения Армении по возрастным группам и возрастного распределения смертей:

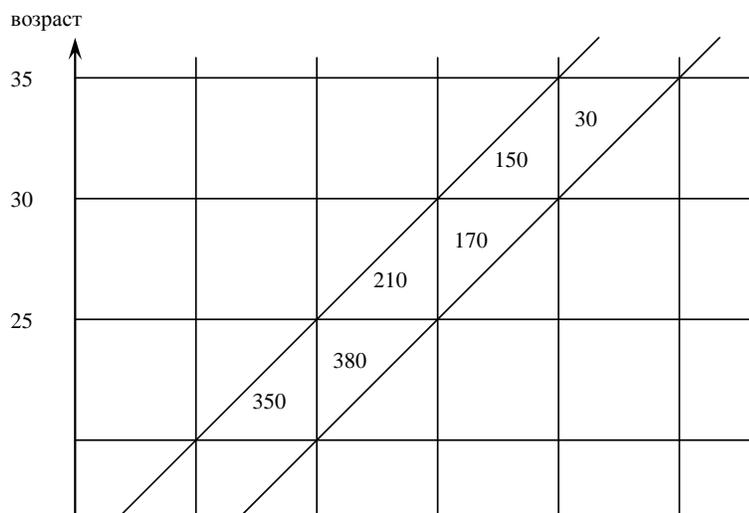
- 1) рассчитайте возрастные коэффициенты смертности 2001 года;
- 2) пользуясь формулой для расчета среднего возраста, рассчитайте средний возраст умерших. Какие факторы влияют на величину полученного Вами показателя?

Возрастные группы	Численность мужчин на 1 января 2001 года, тыс. человек	Численность мужчин на 1 января 2002 года, тыс. человек	Число умерших в 2001 году
0 – 4	106	98,1	2235
5 – 9	153,6	139,3	30
10 – 14	192,9	189,7	38
15 – 19	190,6	193,4	96
20 – 24	166,7	171,7	102
25 – 29	146,6	149,1	118
30 – 34	136	137,1	178
35 – 39	145,2	141,5	301
40 – 44	154	155,8	465
45 – 49	111,6	117,8	574
50 – 54	78,1	83,8	615
55 – 59	44,8	44,9	547
60 – 64	76	72	1564

*Источник: Национальная статистическая служба Республики Армения*

**Задача 8.**

На рисунке представлена информация о заключении первых браков в когорте женщин, о которой также известно, что в точном возрасте 15 лет в этой когорте было 1800 женщин.



1) Определите, в какие годы родились эти 1800 женщин. Укажите точные даты начала и конца этого периода.

2) Предположив, что в этой когорте до точного возраста 15 лет браков не было, рассчитайте для тех возрастных групп, где это возможно:

- приведенные числа первых браков;
- возрастные вероятности вступления в первый брак;
- возрастные коэффициенты первых браков.

3) Рассчитайте вероятность вступления в первый брак и коэффициент первых браков в возрастном интервале 15 – 35 лет. Поясните, чем обусловлены различия в величине рассчитанных Вами показателей?

4) Какими гипотезами Вы пользовались при расчете показателей?

## РАЗДЕЛ 2. АНАЛИЗ ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ И СТАНДАРТИЗАЦИЯ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

### 2.1. АНАЛИЗ ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ

При анализе демографических процессов необходимо различать влияние интенсивности демографического процесса и влияние различных структур на конечный результат, то есть на число событий (рождений, смертей, браков и др.), в которых этот процесс выражается. Структуры населения не только оказывают влияние на демографические процессы, но в то же время сами являются результатом действия этих процессов в прошлом. Наибольшее значение в демографическом анализе имеет группировка населения по полу и возрасту.

#### 2.1.1. Построение и анализ возрастнo-половой пирамиды

Для изучения возрастнo-половой структуры населения обычно используется график, называемый возрастнo-половой пирамидой (рис. 2.1). Пирамида может быть построена для такого населения, в котором известны пол и возраст индивидов. Эту информацию можно получить из переписи населения.

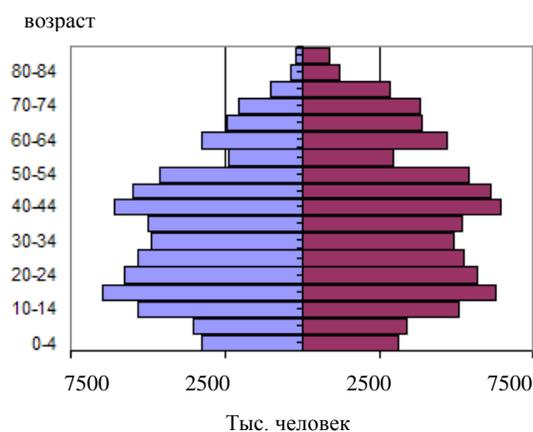


Рис. 2.1. Возрастно-половая пирамида. Россия, 2002 г.

Каждая возрастнo-половая группа представлена на графике в виде прямоугольника, площадь которого соответствует численности данной возрастнo-половой группы или ее доле в общей численности населения. Все прямоугольники

образуют пирамиду, причем на вертикальной оси откладывается возраст (однолетние или пятилетние возрастные группы) и иногда – годы рождения соответствующих поколений, по горизонтальной оси – численность (доля) каждой возрастной группы. Пирамида строится или на основе однолетних возрастных групп, или на основе пятилетних и даже десятилетних групп. Выбор масштаба зависит как от качества данных, так и от целей исследования. Выбор относительных или абсолютных значений зависит от сравниваемых населений и временных интервалов. Если необходимо сравнить возрастные структуры населений, весьма различающихся по численности, то используются относительные значения, то есть рассчитывается доля данной возрастно-половой группы во всем населении (мужчины и женщины вместе). Традиционно мужчинам отводится левая часть пирамиды, женщинам – правая.

При построении пирамиды на основе данных в пятилетних возрастных группах основываются на гипотезе равномерного распределения населения в данной возрастной группе, приписывая каждому возрасту одну пятую численности данной группы.

Если распределение населения по полу и возрасту по итогам переписи включает группу индивидов, возраст (и пол) которых неизвестен, то их можно распределить по всем остальным возрастно-половым группам пропорционально численности этих групп.

Анализ возрастно-половой структуры можно осуществлять по следующей примерной схеме:

- обоснование выбора абсолютных или относительных показателей для построения пирамиды, построение графика и его анализ;
- расчет и анализ показателей вторичного и третичного соотношения полов, а также соотношения полов в населении в целом;
- расчет и анализ коэффициентов демографической нагрузки.

Вторичное соотношение полов рассчитывается как отношение числа рожденных мальчиков к числу рожденных девочек. Как правило, это отношение

стабильно и равно приблизительно 1,06 – 1,07. Третичное соотношение полов – это соотношение численности мужчин и женщин во всех остальных возрастных группах, рассчитывается как отношение численности мужчин в возрасте  $x$  к численности женщин в том же возрасте:  $\frac{P_x^m}{P_x^f}$ . Затем полученный ряд показателей

наносится на график для последующего анализа (рис. 2.2.). Третичное соотношение полов зависит от 1) соотношения полов при рождении, 2) миграционных процессов, 3) сверхсмертности мужчин или женщин в отдельных возрастах. Чаще в населении наблюдается мужская сверхсмертность, т.е. превышение смертности мужчин над смертностью женщин в отдельных возрастных группах. Наибольших значений показатель сверхсмертности достигает в трудоспособных возрастах, что отражается и на графике третичного соотношения полов.

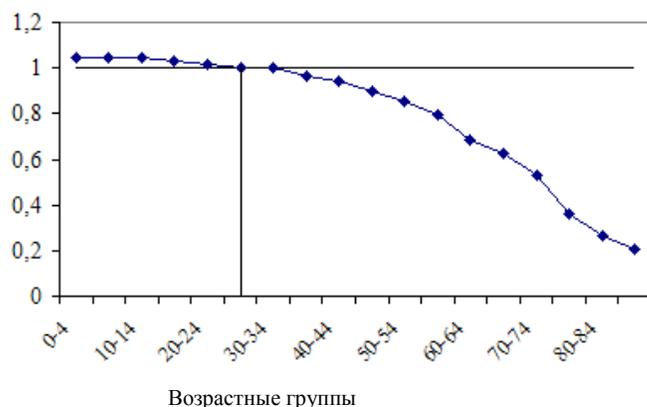


Рис. 2.2. Третичное соотношение полов. Россия, 2002 г.

При анализе старения населения рассматривается соотношение в населении трех крупных возрастных групп. В российских статистических публикациях принято выделять следующие возрастные группы:

- дети (0 – 14 лет);
- трудоспособные (15 – 54 года (женщины) и 15 – 59 лет (мужчины));

- пожилые (55 лет и старше (женщины) и 60 лет и старше (мужчины)).

Также используются показатели демографической нагрузки, позволяющие оценить уровень и структуру нагрузки, приходящейся на 1000 человек в трудоспособном возрасте:

$$K_o = \frac{P_{0-14}}{P_{15-54(59)}} \cdot 1000 - \text{коэффициент нагрузки детьми;}$$

$$K_n = \frac{P_{55+(60+)}}{P_{15-54(59)}} \cdot 1000 - \text{коэффициент нагрузки пожилыми;}$$

$$K_{\text{общ}} = \frac{P_{0-14} + P_{55+(60+)}}{P_{15-54(59)}} \cdot 1000 = K_o + K_n - \text{коэффициент общей нагрузки.}$$

## ЗАДАЧИ

### *Задача 1. Сравнение возрастно-половых структур*

Проведите сравнительный анализ двух возрастно-половых структур. Сравните возрастную структуру России на 1 января 2004 г. и возрастную структуру любой другой страны. Данные возьмите, например, в сборнике World Population Prospects. The 2000 Revision. Volume II: Sex and Age (Medium Variant для 2000 года).

1) Постройте возрастно-половые пирамиды для двух стран. Обоснуйте выбор абсолютных или относительных чисел. Прокомментируйте общую форму пирамид, объясните появление малочисленных и многочисленных поколений, если таковые имеются.

2) Сравните третичное соотношение полов в двух населения. Для этого воспользуйтесь графиком, на который нанесите кривые для обеих стран. Прокомментируйте форму графика и дайте ответы на вопросы: какими факторами обусловлены различия в форме кривых, а также различия в возрасте, при котором мужчин становится меньше, чем женщин?

3) Рассчитайте средний возраст обоих населений (для мужчин и женщин отдельно), средний возраст детей (0-14 лет), трудоспособных (15-59 лет) и пожилых (60 лет и старше). Прокомментируйте. Какое население более старое? Почему?

4) Рассчитайте для обоих населений доли трех основных возрастных групп и показатели демографической нагрузки. Каковы социально-экономические последствия сложившихся в этих странах возрастнo-половых структур?

*Задача 2. Сравнение возрастнo-половых структур Алжира и Франции*

На основе данных, приведенных в таблице, сравните возрастнe структуры

Франции и Алжира (тыс., 2000 г.):

Возрастные группы	Алжир		Франция	
	мужчины	женщины	мужчины	женщины
0-4	2109	2030	1822	1734
5-9	1934	1861	1878	1788
10-14	1834	1764	1955	1870
15-19	1787	1723	1975	1887
20-24	1608	1556	1978	1895
25-29	1379	1309	2155	2082
30-34	1183	1155	2156	2125
35-39	1040	1026	2136	2164
40-44	780	756	2109	2149
45-49	659	617	2102	2130
50-54	475	466	2015	2019
55-59	312	332	1403	1429
60-64	280	312	1303	1410
65-69	237	275	1245	1464
70-74	159	186	1075	1408
75-79	85	110	787	1188
80-84	46	50	378	682
85-89	16	16	231	535
90-94	2	2	81	258
95-99	0	0	13	60
100+	0	0	1	5
итого	15925	15546	28798	30282

Используя данные о естественном движении населения этих стран, приведенные ниже, прокомментируйте форму пирамид.

Франция	1950-1955	1955-1960	1960-1965	1965-1970	1970-1975	1975-1980	1980-1985	1985-1990	1990-1995	1995-2000
Ежегодное число рождений (тыс.)	830,0	818,0	852,0	848,0	843,0	747,0	779,0	770,0	734,0	742,0
Ежегодное число смертей (тыс.)	544,0	525,0	531,0	548,0	554,0	547,0	550,0	534,0	526,0	549,0
Общий коэффициент рождаемости (на 1000)	19,5	18,4	18,1	17,0	16,3	14,0	14,3	13,7	12,8	12,6
Общий коэффициент смертности (на 1000)	12,8	11,8	11,2	11,0	10,7	10,3	10,1	9,5	9,2	9,3

Суммарный коэффициент рождаемости (на 1 женщину)	2,7	2,7	2,9	2,6	2,3	1,9	1,9	1,8	1,7	1,8
Коэффициент младенческой смертности (на 1000 рождений)	45,0	32,8	24,9	20,5	15,9	11,3	9,2	7,8	6,5	5,5
Ожидаемая продолжительность жизни при рождении (мужчины, лет)	63,7	66,5	67,6	67,9	68,6	69,7	70,8	72,0	73,3	74,2
Ожидаемая продолжительность жизни при рождении (женщины, лет)	69,5	72,9	74,5	75,4	76,3	77,8	78,9	80,3	81,4	82,0

Алжир	1950-1955	1955-1960	1960-1965	1965-1970	1970-1975	1975-1980	1980-1985	1985-1990	1990-1995	1995-2000
Ежегодное число рождений (тыс.)	471,0	521,0	573,0	628,0	714,0	782,0	824,0	824,0	773,0	699,0
Ежегодное число смертей (тыс.)	221,0	217,0	220,0	223,0	229,0	233,0	211,0	184,0	171,0	174,0
Общий коэффициент рождаемости (на 1000)	51,0	50,8	50,4	48,9	48,0	45,0	40,6	35,1	29,2	24,1
Общий коэффициент смертности (на 1000)	23,9	21,2	19,4	17,4	15,4	13,4	10,4	7,9	6,5	6,0
Суммарный коэффициент рождаемости (на 1 женщину)	7,3	7,3	7,4	7,4	7,4	7,2	6,4	5,2	4,1	3,2
Коэффициент младенческой смертности (на 1000 рождений)	185,0	175,0	160,0	150,0	132,0	112,0	88,0	69,6	56,9	53,5
Ожидаемая продолжительность жизни при рождении (мужчины, лет)	42,1	44,7	47,3	50,4	53,5	56,5	60,0	64,1	66,1	66,6
Ожидаемая продолжительность жизни при рождении (женщины, лет)	44,2	46,8	49,4	52,5	55,5	58,5	62,0	66,1	68,6	69,3

### Задача 3. Анализ вторичного соотношения полов в странах мира

На основе данных таблицы рассчитайте значения вторичного соотношения полов по странам мира. Прокомментируйте различия в значении этого показателя.

страна	год	родилось	
		мальчиков	девочек
Германия	1994	395869	373734
Франция	1992	381744	361914
Болгария	1993	43486	40914
Китай	1989	12700194	11151682
Сингапур	1995	25315	23295
Сальвадор	1992	77086	76928
Мексика	1993	1425959	1412862
Зимбабве	1992	181007	178279
Мали	1987	192293	182842

Источник: *Demographic Yearbook. 1995, pp. 332-351*

### Задача 4. Анализ третичного соотношения полов в населении Москвы

На основе данных о численности мужчин и женщин в различных возрастах (Москва, 1999 г.) рассчитайте показатель третичного соотношения полов. Нанесите полученные значения на график и прокомментируйте форму полученной кривой. Какие факторы обусловили уровень третичного соотношения полов в разных возрастах?



0-4	6802579	4748506	5344995	6129056	3276570	6550214	4577542	5177772	5902504	3122781
5-9	6306267	6100480	4925977	5768357	3548366	6108947	5874539	4780740	5591985	3392507
10-14	4314249	6713686	4827214	5372102	5312753	4187476	6488527	4685012	5220136	5093624
15-19	4501438	6294053	6364643	5118710	6504187	4473449	5996072	6020639	4848901	6296441
20-24	5793864	4981200	6620132	4955983	5783137	5758060	4725186	6374944	4798637	5683267
25-29	5251212	3550998	6028533	6373602	5314150	5339868	3550917	5873390	6183033	5298826
30-34	5050852	5791986	4031989	6472839	4914529	6052060	5916149	3983770	6389950	4921845
35-39	2474076	4579405	4091065	5821223	5024854	3949246	4747641	4307468	5862775	5191530
40-44	2355664	5019356	5068074	3775717	6084104	3821070	5905616	5417273	3886934	6462366
45-49	2681819	2512592	4444660	3767156	5493467	4485272	4185455	4931810	4207444	6112425
50-54	2167708	1946978	4139383	4453975	4642046	3797121	3306224	5576260	5139558	5429152
55-59	1481427	2383496	1916805	3719890	2365925	3270158	4490386	3678543	4680769	2981474
60-64	1162687	1819509	1683003	3239655	3250993	2426688	3690345	3382451	5120406	4732069
65-69	847294	1174455	1702552	1367725	2444084	1816774	3006390	3790271	3142487	3900492
70-74	631343	720217	1080923	1011253	2033652	1490543	1922620	2875358	2621747	3864045
75-79	352203	446865	539960	819516	1036442	870142	1202200	1874277	2513644	2874844
80-84	160620	228032	246012	364157	329521	436109	733215	895059	1405405	1240169
85 и +	87461	120750	135387	143631	185987	274456	432150	552749	746721	904212
Возраст не известен	2004	28157	16958	39246	60366	1895	29317	23870	45612	59529

Нанесите на графики и прокомментируйте динамику отдельных групп населения: женщин репродуктивного возраста, пенсионеров, призывников, школьников (полагая, что в пятилетних возрастных группах население распределено равномерно), пожилых (70 лет и старше, 85 лет и старше). Каковы возможные последствия этой динамики для социально-экономического развития страны?

*Задача 7. Расчет коэффициентов демографической нагрузки в федеральных округах РФ*

На основе данных о численности трех возрастных групп (на 1 января 2002 г.), приведенных в таблице, рассчитайте коэффициенты демографической нагрузки в федеральных округах России (для городского и сельского населения), и сравните их. Прокомментируйте различия.

Федеральные округа	мужчины и женщины в возрастах 0 – 15 лет	мужчины в возрастах 16 – 59 лет, женщины в возрастах 16 – 54 года	мужчины в возрастах 60 лет и более, женщины в возрастах 55 лет и более
городское население			
Российская Федерация	18386077	65522517	21172338
Центральный	4629050	17542191	6668671
Северо-Западный	1908937	7384805	2381785
Южный	2313510	7402303	2577640

Приволжский	4028986	14018798	4355847
Уральский	1847002	6387906	1803423
Сибирский	2666378	9237644	2574988
Дальневосточный	992214	3548870	809984
сельское население			
Российская Федерация	8379230	21806582	8687647
Центральный	1345624	4103240	2193036
Северо-Западный	479923	1530971	572682
Южный	2219162	5135721	1822925
Приволжский	2000850	5026782	2210561
Уральский	538446	1454356	489058
Сибирский	1392078	3523898	1147114
Дальневосточный	403147	1031614	252271

Источник: Демографический ежегодник России: Стат.сб./Госкомстат России. - М., 2002. - стр. 42.

#### Задача 8

В таблице приведена возрастно-половая структура населения Москвы по переписи 1939 года. Постройте график вторичного соотношения полов и прокомментируйте его. Проанализируйте соотношение численностей отдельных многочисленных и малочисленных поколений. Какие социально-экономические процессы повлияли на формирование такой формы возрастно-половой структуры?

возраст	мужчины	женщины
0	51659	49759
1	51797	50624
2	28020	27414
3	23701	23216
4	21458	21080
5	22661	22917
6	28342	28189
7	28876	29365
8	29670	30074
9	28856	28893
10	32061	32419
11	34245	34401
12	38407	38447
13	39140	40017
14	37790	39974
15	37352	40497
16	35028	40593
17	34055	39503

18	35445	40901
19	31564	35571
20	36912	41193
21	24680	30032
22	29085	38795
23	36810	47535
24	53622	57724
25	53796	54798
26	56089	58733
27	49816	50329
28	55327	59321
29	44908	47871
30	48273	52275
31	43960	43268
32	46188	47402
33	39711	43227
34	41483	45254
35	39168	42938
36	35159	43183
37	24498	35764

38	37284	53548	71	1890	4664
39	30018	36874	72	1916	5942
40	30302	38441	73	1642	5302
41	24772	27645	74	1335	4332
42	27179	33141	75	1320	4971
43	24085	28449	76	949	3459
44	21148	25194	77	658	2747
45	21572	24302	78	725	2858
46	19952	22270	79	416	1512
47	16436	18779	80	391	2008
48	19721	23127	81	209	855
49	16129	19525	82	247	1061
50	19680	24395	83	190	794
51	14591	15229	84	151	615
52	15856	18318	85	145	727
53	14438	17134	86	72	425
54	13243	16467	87	68	308
55	12119	17994	88	39	275
56	10897	16357	89	25	147
57	8912	13138	90	21	176
58	10543	16639	91	13	63
59	8517	12930	92	13	63
60	8443	16049	93	12	67
61	7069	10209	94	6	30
62	7191	12823	95	6	48
63	6323	13110	96	7	31
64	5543	11521	97	4	20
65	5707	12955	98	4	15
66	4450	10635	99	5	7
67	3453	9137	100>	6	49
68	3967	9627	возраст неизвестен	513	405
69	2681	6688	всего	1917691	2219327
70	2860	9205			

**Задача 9**

На основе данных, приведенных в Таблицах, рассчитайте и проанализируйте возрастную-половую структуру потерь населения России в Великой Отечественной войне. Каковы социально-экономические и демографические последствия военных потерь?

Оценка потерь по полу и возрасту (в тыс.)

Возрастные группы	Численность мужчин на конец войны			численность женщин на конец войны		
	Гипотетическое (если бы не было войны)	реальное	потери	Гипотетическое (если бы не было войны)	реальное	потери

0-4	7334	6687		7293	6632	
5-9	11591	11006		11684	11054	
10-14	8954	8761		9007	8900	
15-19	11092	10028		11220	10880	
20-24	9839	6430		9911	9023	
24-29	6871	4357		7437	6648	
30-34	8238	5156		8992	7996	
35-39	7712	5006		8007	7528	
40-44	6148	4070		6658	6509	
45-49	4637	3282		5571	5418	
50-54	3404	2882		4137	3967	
55-59	2727	2307		3586	3407	
60-64	2100	1705		3046	2848	
65+	3768	2687		6207	5374	
Всего	94415	74364		102756	96184	

Источник: Е.М. Андреев и др.

Постройте возрастную-половую пирамиду потерь на 1946 год. Как военные потери в разных возрастах отразились на современной пирамиде России?

Потери в % от численности соответствующих поколений

Возраст в 1946 году	Мужчины	Женщины
0-4	7,8	8,0
5-14	3,5	3,3
15-19	9,4	3,0
20-29	34,4	9,4
30-39	35,0	8,3
40-49	30,2	2,4
50-59	14,1	4,3
60 et +	19,1	9,1

Источник: Е.М. Андреев и др.

## 2.2. СТАНДАРТИЗАЦИЯ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

В предыдущем разделе было показано, что возрастные и суммарные коэффициенты не зависят от возрастной структуры. Их величина связана только с интенсивностью соответствующего демографического процесса.

Величина общих коэффициентов зависит как от состава населения (возрастного, брачного, религиозного и т.п.), так и от интенсивности изучаемого процесса. В общем виде формулу общего коэффициента можно представить следующим образом:

$$K = \frac{\sum_x t_x \cdot P_x}{\sum_x P_x},$$

где:

K – общий коэффициент в изучаемом населении;

$t_x$  – возрастные коэффициенты изучаемого населения;

$P_x$  – возрастное распределение изучаемого населения (абсолютные значения).

В том случае, если необходимо воспользоваться общими коэффициентами при сравнении уровней рождаемости, смертности и т.п. по странам или, например, социальным группам, для устранения влияния структуры населения на величину общих коэффициентов можно воспользоваться методами стандартизации. Существует несколько методов стандартизации, выбор которых зависит от исходных данных.

**2.2.1. Прямая стандартизация**

Для использования метода прямой стандартизации необходимы следующие данные: 1) возрастная структура сравниваемых населений; 2) возрастное распределение событий. Используя эти распределения, мы можем рассчитать возрастные коэффициенты. В качестве стандарта выбирают структуру населения, близкого к изучаемому, и предполагают, что структура сравниваемых населений такая же, как и в населении-стандарте.

Стандартизованные коэффициенты рассчитываются следующим образом:

$$K^{станд} = \sum_x t_x * P_x^{станд},$$

где:

$K^{станд}$  – стандартизованный коэффициент для изучаемого населения;

$t_x$  – возрастные коэффициенты в изучаемом населении;

$P_x^{станд}$  – доли соответствующих возрастных групп в общей численности населения,

принятого за стандарт.

Если возрастная структура представлена абсолютными значениями, то стандартизованный коэффициент будет рассчитываться следующим образом:

$$K^{станд} = \frac{\sum_x t_x * P_x^{станд}}{\sum_x P_x^{станд}}, \text{ где } P_x^{станд} \text{ – абсолютные численности возрастнo-половых}$$

групп в населении, принятом за стандарт.

В международных сравнениях для прямой стандартизации коэффициентов смертности используют европейский и мировой стандарты Всемирной организации здравоохранения:

Возраст (лет)	Европейский стандарт	Мировой стандарт	Возраст (лет)	Европейский стандарт	Мировой стандарт
0	0,016	0,024	45-49	0,070	0,060
1-4	0,064	0,096	50-54	0,070	0,050

5-9	0,070	0,100	55-59	0,060	0,040
10-14	0,070	0,090	60-64	0,050	0,040
15-19	0,070	0,090	65-69	0,040	0,030
20-24	0,070	0,080	70-74	0,030	0,020
25-29	0,070	0,080	75-79	0,020	0,010
30-34	0,070	0,060	80-84	0,010	0,005
35-39	0,070	0,060	85+	0,010	0,005
40-44	0,070	0,060			

2.2.2. Косвенная стандартизация

Для использования метода косвенной стандартизации необходимы следующие данные: 1) возрастная структура сравниваемых населений, 2) общее число изучаемых событий в сравниваемых населениях. За стандарт принимаются возрастные коэффициенты населения, принятого за стандарт. Стандартизованный коэффициент рассчитывается как отношение числа событий в изучаемом населении к так называемому «ожидаемому числу событий», умноженное на общий коэффициент в населении-стандарте. Заметим, что это последнее действие (умножение) излишне, так как уже на основе соотношения реального и ожидаемого числа событий мы видим, во сколько раз изменился бы коэффициент, если бы в изучаемом населении возрастные коэффициенты были такими же, как в населении-стандарте.

Стандартизованный коэффициент методом косвенной стандартизации можно рассчитать по следующей формуле:

$$K^{станд} = \frac{\sum_x t_x P_x}{\sum_x t_x^{станд} P_x} K' \text{ или } K^{станд} = \frac{K}{\sum_x t_x^{станд} P_x} K',$$

где:

$K^{станд}$  – стандартизованный коэффициент в изучаемом населении;

$K$  – общий коэффициент в изучаемом населении;

$t_x$  – возрастные коэффициенты изучаемого населения;

$t_x^{станд}$  – возрастные коэффициенты населения, принятого за стандарт;

$P_x$  – возрастное распределение изучаемого населения (абсолютные значения),  $P_x''$  – возрастное распределение изучаемого населения (доли возрастных групп в % к общей численности населения);

$K'$  – общий коэффициент в населении, принятом за стандарт.

### 2.2.3. Обратная стандартизация

Для использования метода обратной стандартизации необходимы следующие данные: 1) распределение умерших по возрастам в сравниваемых населенных пунктах, 2) общая численность населения. Данные о возрастном составе населения отсутствуют. За стандарт принимаются повозрастные коэффициенты стандартного населения. Стандартизованный коэффициент рассчитывается как отношение так называемой «ожидаемой численности населения» к реальной его численности, умноженное на общий коэффициент в населении-стандарте.

Стандартизованный коэффициент методом обратной стандартизации можно рассчитать следующим способом:

$$K^{\text{станд}} = \frac{\sum_x \frac{T_x}{t_x^{\text{станд}}}}{P} K',$$

где:

$K^{\text{станд}}$  – стандартизованный коэффициент в изучаемом населении;

$T_x$  – возрастные числа событий в изучаемом населении;

$t_x^{\text{станд}}$  – возрастные коэффициенты населения, принятого за стандарт;

$P$  – абсолютная численность изучаемого населения;

$K'$  – общий коэффициент в населении, принятом за стандарт.

Стандартизованные коэффициенты можно использовать только для сравнений, поскольку они зависят от выбранного стандарта. Сравнения можно производить только в том случае, если стандартизованные коэффициенты вычислены на основе одного и того же стандарта.

### 2.2.4. Двойная стандартизация

Двойная стандартизация позволяет разграничить влияние интенсивности изучаемого демографического процесса и структуры населения на абсолютное число демографических событий и величину общего коэффициента. Рассчитывают абсолютное и относительное влияние структуры населения и интенсивности демографического процесса.

Пусть  $T^A$  и  $T^B$  – абсолютное число событий в населении А и населении В;  $P_x^A$  и  $P_x^B$  – структуры населения А и В;  $t_x^A$  и  $t_x^B$  – возрастные коэффициенты изучаемого процесса в населенных пунктах А и В.

Относительная разница чисел событий в населениях А и В может быть представлена следующим выражением:  $\frac{T^B}{T^A} = \frac{\sum P_x^A t_x^B}{\sum P_x^A t_x^A} \cdot \frac{\sum P_x^B t_x^B}{\sum P_x^B t_x^A}$ , в котором первая дробь характеризует разницу, обусловленную относительным различием возрастных коэффициентов, вторая дробь – разницу, обусловленную относительным различием структур.

Абсолютную разницу чисел событий можно представить следующим образом:

$$T^B - T^A = \sum P_x^B t_x^B - \sum P_x^A t_x^A \text{ или } T^B - T^A = \sum (P_x^B - P_x^A) t_x^B - \sum P_x^A (t_x^B - t_x^A).$$

**ЗАДАЧИ**

*Задача 1. Сравнение смертности дворников и милиционеров в Петрограде в 1923 году<sup>27</sup>*

Имеются следующие данные о численности дворников и милиционеров и количестве умерших среди них в Петрограде в 1923 г.:

возрастная группа (лет)	Дворники		Милиционеры	
	живущие	умершие	живущие	умершие
20-29	2277	19	2158	28
30-39	2541	28	1237	22
40-49	3014	69	442	9
50-59	3118	78	106	3
Всего	10950	194	3943	62

- Рассчитайте общие коэффициенты смертности дворников и милиционеров в Петрограде за 1923 г. и сравните их;
- Проведите стандартизацию этих показателей, взяв за стандарт сначала данные для дворников, затем данные для милиционеров. Сравните и объясните полученные результаты.

*Задача 2.<sup>28</sup>*

В таблице представлены данные за 1910 год, отражающие смертность от туберкулеза белого и черного населения Нью-Йорка и Ричмонда.

Население	Все население		Число умерших		Возрастная структура всего населения
	Нью-Йорк	Ричмонд	Нью-Йорк	Ричмонд	
Белые	4675174	80895	8368	131	980,8
Черные	91709	46732	513	155	19,2

<sup>27</sup> А.Я. Боярский, Г.Ш. Бахметова, Л.П. Харченко Практикум по демографии. М.: Мысль, 1985. – с. 37

<sup>28</sup>

Всего	4766883	127627	8881	286	1000
-------	---------	--------	------	-----	------

Используя стандартизацию, 1) сравните смертность белого и черного населения; 2) сравните уровень смертности в Нью-Йорке и Ричмонде.

**Задача 3.**

На основе данных таблицы сравните уровень рождаемости в двух регионах России в 2001 году. Обоснуйте выбор стандартизованного показателя для сравнения.

Возрастные группы	Возрастные коэффициенты рождаемости на 1000 женщин		Возрастная структура женщин, в тыс.	
	Брянская область	Республика Дагестан	Брянская область	Республика Дагестан
15 – 19	26,3	26,9	57,2	150,2
20 – 24	91,4	153,1	49,4	126,3
25 – 29	64,8	122,9	46,8	104,0
30 – 34	32,1	78,4	45,5	100,8
35 – 39	9,8	34,3	48,6	99,6
40 – 44	1,6	8,6	58,9	95,7
45 – 49	0	0,8	55,4	66,8

**Задача 4.**<sup>29</sup>

Используя население Аргентины как стандарт, сравните смертность Колумбии и Панамы; используя население Панамы как стандарт, сравните смертность Колумбии и Аргентины; используя население Колумбии как стандарт, сравните смертность Аргентины и Панамы. Как использование разных стандартов влияет на полученные результаты?

Возрастные группы	Аргентина 1986		Колумбия 1984		Панама 1987	
	численность населения (тыс.)	число смертей	численность населения (тыс.)	число смертей	численность населения (тыс.)	число смертей
0-4	1767	11832	1857	5179	150	860
5-14	3062	1390	3372	2300	286	132
15-24	2430	2816	3123	6646	243	322
25-44	4101	9690	3724	12702	294	614
45-64	2755	36581	1587	15441	134	925
65 лет и старше	1129	70138	478	27034	51	2343

**Задача 5**<sup>30</sup>

Используя стандартизацию, сравните смертность в Шотландии со смертностью в Англии и Уэльсе:

Возрастные группы	Средняя численность населения (тыс.)	Число
-------------------	--------------------------------------	-------

<sup>29</sup> Hinde A. Demographic Methods. – N.-Y.: Arnold, 1998 – p. 26

<sup>30</sup> Hinde A. Demographic Methods. – N.-Y.: Arnold, 1998 – p. 27

	Англия и Уэльс	Шотландия	смертей, Англия и Уэльс
0-4	3006	317	8200
5-24	14958	1655	6280
25-44	13082	1326	14370
45-64	11040	1140	101500
65-74	4619	459	155000
75-84	2338	232	190400
85 лет и старше	541	49	102400
Всего смертей		63800	

*Задача 6. Сравнение смертности от рака груди замужних и незамужних женщин<sup>31</sup>*

Мы располагаем повозрастными коэффициентами смертности от рака груди не состоящих и состоящих в браке женщин. Кроме того, нам известны общие коэффициенты смертности от рака груди (на 1000 женщин):

- для состоящих в браке 55,8 ‰
- для несостоящих в браке 15,2 ‰

Используя данные таблицы, а также все известные Вам методы стандартизации, выясните, влияет ли состояние в браке на смертность от рака груди.

возраст	несостоящие в браке		состоящие в браке	
	численность в тыс.	Повозрастной коэффициент смертности (на 100000)	численность в тыс.	Повозрастной коэффициент смертности (на 100000)
15-34	7615	0,6	8957	2,5
35-44	759	24,9	6165	17,9
45-54	522	74,7	4667	69,4
55-64	343	119,7	3111	132,6
65-74	188	139,4	1814	144,3
75 и ст.	45	303,8	780	375,1
итого	9472		25494	

*Задача 7*

В таблице приведены данные о возрастной структуре и возрастном распределении умерших черного и белого мужского населения США в 1994 году:

Возрастные группы	Умершие		Возрастная структура, тыс.		Возрастная структура, мужчины, все население, тыс.
	черные	белые	черные	белые	

<sup>31</sup> Nombissi A. Principes et méthodes d'analyse démographique. Travaux dirigés. – Université Catholique de Louvain ; année académique 1995 – 1996.

0-4	6749	14553	1581	7995	10094
5-14	123606	368544	2943	15356	19259
15-24	750044	1828876	2698	14749	18347
25-34	1119720	3080160	2580	17112	20677
35-44	1719468	4998105	2349	17415	20648
45-54	1768860	6772896	1395	12636	14591
55-64	2207353	11936925	911	8745	9984
65-74	3094910	24089493	665	7419	8290
75-84	2604850	28266222	295	3827	4206
85 и старше	1236292	16103460	76	885	980
всего	14631852	97459234	15493	106139	10094

Источник: U.S. Census Bureau, *Statistical abstracts of the United States: 1995*

- 1) Рассчитайте и сравните общие коэффициенты смертности в этих группах населения.
- 2) Сравните смертность черного и белого мужского населения, используя стандартизованные коэффициенты смертности.
- 3) Рассчитайте относительную и абсолютную разницу в числах умерших, обусловленную различием в возрастных структурах и различием в возрастных уровнях смертности двух групп населения.

### РАЗДЕЛ 3. ТАБЛИЦЫ СМЕРТНОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

*Хотя судьбы индивидов настолько отличаются, что один рождается на свет на мгновение, а жизнь другого длится целый век, из этого разнообразия частных возможностей рождается общая судьба всего человечества, на основе которой каждый может увидеть свою собственную судьбу, характерную для своего возраста, не считая тех поправок, которые привносятся физиологией, климатом, режимом.*

J.-B. Moheau Recherches et considérations sur la population de France.

#### 3.1. ПОКАЗАТЕЛИ ТАБЛИЦЫ СМЕРТНОСТИ

Таблица смертности – это числовая модель смертности, представляющая собой систему взаимосвязанных, упорядоченных по возрасту рядов чисел, отражающих процесс вымирания некоторого условного или реального поколения с фиксированной начальной численностью. Как и любая демографическая таблица, таблица смертности имеет шкалу. Шкала приведена в первой колонке таблицы и характеризует точное число полных лет, прошедших с момента рождения. Начальный возраст в таблице – 0 лет (момент рождения), конечный –  $w$  лет, возраст, к которому вымирает практически вся совокупность родившихся.

Первая колонка таблицы – точный возраст  $x$ . Это единственная независимая переменная, которая может измеряться в днях, месяцах (при изучении младенческой смертности), но, как правило, измеряется в годах. В зависимости от длины возрастного интервала  $n$  выделяют полные ( $n=1$ ) и краткие ( $n=5$  или  $n=10$ ) таблицы смертности. В таблице 3.1 приведен пример краткой таблицы смертности.

Таблица 3.1. Пример краткой таблицы смертности (Россия, мужчины, 2001 г.)

$x$	${}_n m_x$	${}_n q_x$	${}_n p_x$	$l_x$	${}_n d_x$	${}_n L_x$	$T_x$	$E_x$	${}_n a_x$
0	0,0168	0,0167	0,9833	100000	1666	99178	5900545	59,0	0,5
1	0,0011	0,0044	0,9956	98334	432	392526	5901367	59,0	2,1
5	0,0006	0,0030	0,9970	97902	293	488835	5408841	55,2	2,7
10	0,0006	0,0030	0,9970	97609	292	487370	4920006	50,4	2,7
15	0,0020	0,0100	0,9900	97316	969	484348	4432636	45,5	2,7
20	0,0045	0,0223	0,9777	96348	2146	476779	3948289	41,0	2,7
25	0,0058	0,0286	0,9714	94202	2696	464772	3471510	36,9	2,7
30	0,0070	0,0344	0,9656	91506	3152	450231	3006738	32,9	2,7
35	0,0094	0,0460	0,9540	88355	4064	432339	2556507	28,9	2,7

40	0,0131	0,0636	0,9364	84291	5358	408974	2124168	25,2	2,7
45	0,0184	0,0882	0,9118	78933	6962	378372	1715193	21,7	2,7
50	0,0257	0,1212	0,8788	71971	8720	339314	1336821	18,6	2,6
55	0,0342	0,1582	0,8418	63251	10004	292512	997507	15,8	2,6
60	0,0470	0,2112	0,7888	53247	11245	239248	704995	13,2	2,6
65	0,0607	0,2645	0,7355	42002	11110	183031	465748	11,1	2,6
70	0,0829	0,3439	0,6561	30892	10625	128167	282717	9,2	2,5
75	0,1034	0,4102	0,5898	20267	8314	80406	154550	7,6	2,5
80	0,1407	0,5153	0,4847	11953	6160	43780	74144	6,2	2,4
85+	0,1908	1,0000	0	5793	5793	30364	30364	5,2	5,2

Показатели таблицы смертности:

$l_x$  – число доживших до точного возраста  $x$  из начальной численности когорты. Начальная численность когорты (поколения) или корень таблицы принимается равной 100000 человек.

${}_n d_x$  – числа умирающих в интервале возраста от  $x$  до  $(x+n)$ . Сумма всех значений  ${}_n d_x$  включает всех новорожденных:  $\sum_{x=0}^w {}_n d_x = l_0$ ,  ${}_n d_x = l_x - l_{x+n}$ .

${}_n q_x$  – вероятность умереть в интервале возраста от  $x$  до  $x+n$ ;  ${}_n q_x = {}_n d_x / l_x$  для всех тех, кто дожил до возраста  $x$ .

${}_n p_x$  – вероятность выжить к возрасту  $x+n$  для всех тех, кто дожил до возраста  $x$ ;

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - {}_n d_x}{l_x} = \frac{l_x}{l_x} - \frac{{}_n d_x}{l_x} = 1 - {}_n q_x.$$

${}_n L_x$  – среднее число человеко-лет, прожитое в интервале возраста от  $x$  до  $x+n$  теми, кто дожил до начала данного интервала ( $l_x$ ). В общем виде  ${}_n L_x = \int_x^{x+n} l(y) dy$ .

Приближенно, при использовании гипотезы равномерного распределения смертей в возрастном интервале, этот показатель рассчитывается как полусумма чисел доживающих до начала и конца возрастного интервала, умноженная на длину возрастного интервала  $n$ :

$${}_n L_x = n \cdot \frac{l_x + l_{x+n}}{2}. \text{ Эта гипотеза будет слишком грубой для самых младших и самых старших}$$

возрастов.

${}_n \alpha_x$  – среднее число человеко-лет, прожитых в интервале от  $x$  до  $x+n$  лет умершими в этом интервале или средняя продолжительность жизни в возрастном интервале от  $x$  до  $x+n$ . Этот показатель важен при построении таблиц смертности для условного поколения

современными методами. В таблицах смертности для реальных поколений он вычисляется непосредственно и не имеет большого значения. В общем виде  ${}_nL_x = n \cdot l_{x+n} + {}_n a_x \cdot {}_n d_x$ .

${}_n m_x$  – табличный возрастной коэффициент смертности в возрастном интервале от  $x$  до  $x+n$ ;  ${}_n m_x = \frac{{}_n d_x}{{}_n L_x}$ .

$T_x$  – число человеко-лет жизни в возрасте  $x$  лет и старше,  $T_x = L_x + L_{x+n} + \dots + L_w$ .

$E_x$  – ожидаемая продолжительность жизни в возрасте  $x$  лет,  $E_x = T_x / l_x$ . Чаще всего пользуются важнейшей демографической характеристикой смертности населения –  $E_0 = T_0 / l_0$  – ожидаемой продолжительностью жизни при рождении. Этот показатель отражает число лет, которое в среднем предстоит прожить новорожденному при условии, что на протяжении всей жизни этого поколения возрастные уровни смертности останутся такими же, как в году, для которого рассчитан данный показатель. При условии, что число умирающих на первом году жизни достаточно велико, может проявиться так называемый парадокс младенческой смертности, когда  $E_1 > E_0$ .

Приведенные формулы не позволяют рассчитать значения показателей в последнем, открытом интервале (как правило, «85 лет и старше»). Для этого интервала число человеко-лет жизни рассчитывают следующим образом:  ${}_{\infty} L_x = \frac{l_x}{{}_{\infty} m_x}$ , где  ${}_{\infty} m_x$  рассчитывают на основе данных реальной статистики, а  $l_x$  берут из таблицы смертности. При этом в последнем возрастном интервале принимают  ${}_{\infty} q_x = 1$  и  ${}_{\infty} p_x = 0$ <sup>32</sup>.

На рис. 3.1 приведены графики основных функций таблицы смертности.

Кроме ожидаемой продолжительности жизни, по таблице смертности можно также определить:

- отсроченную (временно отсроченную) продолжительность жизни<sup>33</sup> в интервале возраста, которая равна среднему числу лет, которое предстоит прожить в интервале возраста от  $x$  до  $x+n$  лицам, достигшим возраста  $x$ . Например, отсроченная продолжительность жизни мужчин в трудоспособных возрастах (от 15 до 60 лет) рассчитывается по формуле:

$$E_{15-60} = \frac{T_{15} - T_{60}}{l_{15}}$$

<sup>32</sup> Preston S., Heuveline P., Guillot M. Demography. – Blackwell Pub., 2005, . p. 48

<sup>33</sup> Демографический энциклопедический словарь, с. 349

- медианную (вероятную) продолжительность жизни, которая равна медиане распределения лиц, достигших некоторого возраста  $x$  лет, по длительности предстоящей жизни в соответствии с порядком вымирания данной таблицы смертности. Этот показатель можно рассчитать следующим образом<sup>34</sup>: примем гипотезу о том, что для доживших до возраста  $x$  вероятность дожить до возраста  $x+n$  равна вероятности умереть, то есть  $\frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$ . Тогда расчет вероятной продолжительности жизни можно осуществить по формуле:

$$V_x = n + \frac{l_{x+n} - 0,5l_x}{l_{x+n} - l_{x+n+1}},$$

где  $l_{x+n}$  и  $l_{x+n+1}$  – соседние табличные числа доживающих, из которых первое несколько больше, а второе – несколько меньше  $0,5l_x$ ;  $n$  – целая часть  $V_x$ , или разница между возрастом  $x$ , для которого определяют вероятную продолжительность жизни, и тем возрастом  $x+n$ , в котором остается в живых несколько больше половины доживших до возраста  $x$ . В отличие от ожидаемой продолжительности жизни, вероятная продолжительность жизни зависит от смертности не во всем периоде жизни поколения (от 0 до  $w$ ), а только в его части – за исключением старших возрастов. Для новорожденных медианная продолжительность жизни равна возрасту, до которого доживает ровно половина от исходной численности поколения ( $0,5 l_0$ );

- модальную (нормальную) продолжительность предстоящей жизни – возраст, в котором умирает большая часть исходной численности новорожденных. И.Г. Венецкий рекомендует использовать для расчета величины нормальной продолжительности жизни формулы, предложенные В.И. Борткевичем<sup>35</sup>:

- 1) в случае резко выраженного второго максимума чисел умирающих:

$$V_{норм} = m + \frac{d_m d_{m-1}}{2d_m - d_{m-1} - d_{m+1}}, \text{ где } d_m - \text{максимальная величина } d_x.$$

- 2) при не очень сильно выраженном втором максимуме чисел умирающих, находящемся в каком-то более или менее явном возрастном периоде:

<sup>34</sup> См.: Венецкий И.Г. Математические методы в демографии. – М.: Статистика, 1971. – с. 66 – 67.

<sup>35</sup> Венецкий И.Г. Математические методы в демографии. – М.: Статистика, 1971. – с. 70 – 72.

$V_{норм} = \frac{x' + x''}{2} + \frac{(x'' - x')(c - a)}{2(2b - a - c)}$ , где  $x'$  и  $x''$  – высший и низший пределы возрастного периода при  $d_x = max$ ;  $b$  – максимум,  $a$  и  $c$  – смертные случаи за периоды, предшествующий максимуму и последующий за ним.

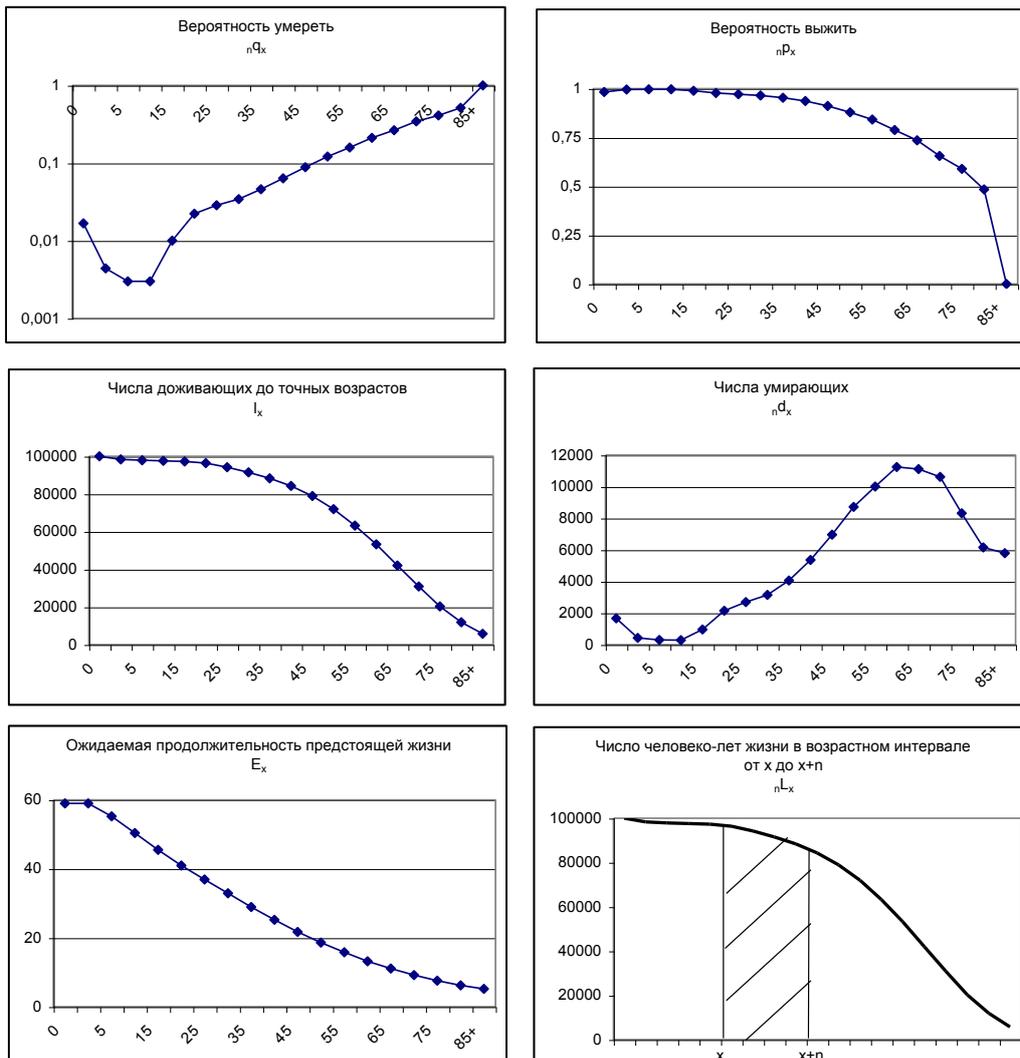


Рис. 3.1. Графики функций таблицы смертности

### 3.2. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ТАБЛИЦ СМЕРТНОСТИ

#### 3.2.1. Метод смертных списков

Первые таблицы смертности (Дж. Граунт, Э. Галлей, К.Ф. Герман и др.) были построены методом смертных списков. Этот метод используется при отсутствии данных о возрастной структуре населения и основан на следующих допущениях: медленное изменение чисел рождений, медленное изменение возрастной смертности, закрытое население. В качестве исходных статистических данных используется группировка умерших по возрастам. При этом отношение числа умерших в возрасте  $x$  к общему числу умерших в течение некоторого периода времени дает  $d_x = M_x/M$ . Вычитая последовательно  $d_x$  из  $l_0=1$ , получаем ряд  $l_x$ , а затем все остальные показатели таблицы.

Если при неизменном уровне рождаемости и смертности числа рождений меняются в геометрической прогрессии со знаменателем  $e^k$ , то для расчета чисел умирающих  $d_x$  получим следующую формулу:

$$d_x = \frac{M_x e^{kx}}{\sum_{x=0}^w M_x e^{kx}}.$$

Этот метод был предложен Л. Эйлером и использован при расчете ряда таблиц смертности до появления *демографического метода*.

#### 3.2.1. Демографический метод

Для расчета современных таблиц смертности условного поколения используется так называемый демографический метод. Демографический метод построения таблиц смертности предполагает наличие не только данных о распределении умерших по возрастам, но и данных о возрастной структуре населения. Впервые он был предложен бельгийцем А. Кетле в 1840 – 1849 гг. Используя разработки английского актуария У. Фара, Кетле рассчитал таблицы смертности для Бельгии на основе возрастной структуры населения, полученной по результатам переписи населения 1846 года, и статистики повозрастной смертности.

Исходным показателем при расчете таблиц этим методом служит возрастной коэффициент смертности, который приравнивается к табличному возрастному коэффициенту смертности. Ключевым моментом демографического метода построения таблиц смертности является переход от коэффициентов смертности к вероятностям умереть таблицы смертности. Для перехода к табличным вероятностям умереть А. Кетле использовал формулу

$$q_x = \frac{2n \cdot m_x}{2 + n \cdot m_x}. \quad (1)$$

Эта формула используется при допущении, что смерти распределены равномерно в интервале возраста от  $x$  до  $x+n$ . К ней можно перейти от показателей  ${}_nL_x$  и  ${}_n m_x$ .

Зависимость  ${}_n q_x$  от  ${}_n m_x$  выглядит следующим образом:

$${}_n q_x = \frac{n \cdot m_x}{1 + (n - a_x) \cdot m_x},$$

где  $n$  – длина возрастного интервала,  $a_x$  – среднее число человеко-лет, прожитых в интервале от  $x$  до  $x+n$  лет умершими в этом интервале.

Формулу (1) можно использовать для оценки показателей таблицы смертности во всех возрастах, кроме самых молодых и самых старых, где гипотеза равномерного распределения смертей не подтверждается. Для оценки вероятностей умереть в этих возрастах применяются специальные формулы, в которые вводится показатель  ${}_n a_x$ . Например, для детских возрастов (младше 5 лет) можно использовать следующие оценки  ${}_n a_x$  в зависимости от уровня смертности в соответствующих возрастах (Таблица 3.2).

Таблица 3.2. Оценка  ${}_n a_x$  в возрастах до 5 лет

	мужчины	женщины
Оценки ${}_1 a_0$		
Если ${}_1 m_0 \geq 0,107$	0,330	0,350
Если ${}_1 m_0 < 0,107$	$0,045 + 2,684 \cdot {}_1 m_0$	$0,053 + 2,8 \cdot {}_1 m_0$
Оценки ${}_4 a_1$		
Если ${}_1 m_0 \geq 0,107$	1,352	1,361
Если ${}_1 m_0 < 0,107$	$1,651 - 2,816 \cdot {}_1 m_0$	$1,522 - 1,518 \cdot {}_1 m_0$

Источник: Preston S., Heuveline P., Guillot M. *Demography – Blackwell Pub.*, 2005, p. 48

В Бюро Цензов США для оценки вероятности умереть в первой возрастной группе используется специальная формула.

Принимая во внимание тот факт, что функция дожития нелинейна на всем своем протяжении, американский демограф Т. Гревилл предложил в 1943 г. скорректированную формулу для перехода от реальных коэффициентов смертности к вероятностям умереть таблицы смертности<sup>36</sup>:

$${}_n q_x = \frac{{}_n m_x}{\frac{1}{n} + {}_n m_x \cdot \left(0.5 + \frac{n}{12} \cdot ({}_n m_x - 0.095)\right)},$$

<sup>36</sup> Формула Гревилла реализована в пакете прикладных демографических программ MortPak.

где  $x$  – точный возраст,  $n$  – длина возрастного интервала (шаг таблицы),  ${}_n m_x$  – возрастной коэффициент смертности, приведенный к 1,  ${}_n q_x$  – вероятность умереть в интервале возраста от  $x$  до  $x+n$  лет.

При расчете кратких таблиц смертности используется также метод В.В. Паевского, впервые реализованный для расчета таблиц смертности населения СССР 1926 – 1927 гг. Числа доживающих до возраста  $x+n$  рассчитываются по следующей формуле:

$$l_{x+n} = l_x \cdot e^{-n \cdot m_x},$$

где  $l_x$  – число доживающих до возраста  $x$ , а  ${}_n m_x$  – коэффициент смертности в интервале возраста от  $x$  до  $x+n$ .

### 3.3. МОДЕЛЬ СТАЦИОНАРНОГО НАСЕЛЕНИЯ

Таблицы смертности представляют собой численную модель вымирания поколения. Существует другая интерпретация этих таблиц, согласно которой таблицы смертности задают некоторое теоретическое население, в котором порядок смертности, числа рождений и возрастная структура полностью определяются соответствующими показателями таблицы смертности и являются постоянными величинами. Миграционный обмен с другими популяциями при этом отсутствует, т.е. население является замкнутым. Поскольку все демографические параметры, включая общую численность населения, у этого населения не меняются со временем, его называли стационарными (от лат. Stationarius – неподвижный). Модель стационарного населения является собой дальнейшее развитие аналитических возможностей метода таблиц смертности путем переноса акцента с исследования процесса вымирания поколения на процесс замещения.

Итак, *стационарное население – это теоретическое население с неизменными числами рождений и возрастными характеристиками смертности, определяемыми таблицей смертности.*

Для того чтобы построить модель стационарного населения, надо оценить функции таблицы смертности. Возрастные коэффициенты смертности стационарного населения определяются соответствующей функцией  $m(x)$  таблиц смертности. Возрастная структура стационарного населения задается табличной функцией  $L(x)$ . В таблицах смертности  $L(x)$  обозначает число человеко-лет, прожитых в интервале возраста теми, кто достиг возраста  $x$ . В модели стационарного населения этот показатель определяет численность соответствующей возрастной группы. Поэтому второе название  $L(x)$  – число живущих в стационарном населении в возрасте  $x$ . Поскольку функция  $L(x)$ , как и другие функции

таблиц смертности, по условиям построения модели неизменна, постольку *постоянной* является и возрастная структура стационарного населения. *Общая численность стационарного населения равна сумме всех  $L(x)$* , т.е.  $T(0) = \sum_0^{\omega} L(x)$ , где  $\omega$  – предельный

возраст таблиц смертности. Показатель  $T(0)$  в таблицах смертности интерпретируется как общее число человеко-лет, которое проживают все новорожденные. Доля отдельной возрастной группы в общей численности стационарного населения составляет

$$c(x) = \frac{L(x)}{T(0)}.$$

Число умерших в отдельных возрастных группах стационарного населения выражается функцией  $d(x)$ . Общее число родившихся в течение года в стационарном населении равно корню таблицы смертности  $l(0)$ . *Общий коэффициент смертности в*

*стационарном населении равен  $m = \frac{\sum_0^w d(x)}{T(0)}$ ; общий коэффициент рождаемости равен*

$$b = l(0)/T(0).$$

*Свойства стационарного населения, вытекающих из его определения.*

1) Из равенства числа умерших числу родившихся, т.е.  $\sum_0^{\omega} d(x) = l(0)$ , следует:

а) Естественный прирост стационарного населения равен нулю, а общая численность стационарного населения неизменна во времени (с учетом условия закрытости);

б) Общие коэффициенты рождаемости и смертности в стационарном населении равны:  $m = n$ ;

2) Общие коэффициенты смертности и рождаемости обратно пропорциональны ожидаемой продолжительности предстоящей жизни при рождении. Из определения ожидаемой продолжительности предстоящей жизни при рождении  $E(0) = T(0)/l(0)$  и из определений общих коэффициентов следует  $n = m = 1/E(0)$ .

3). Постоянство всех демографических показателей обуславливает тот факт, что все возрастные характеристики реального и условного поколений в стационарном населении идентичны. Это очень хорошо видно на сетке Лексиса (см. рисунок 3.2.).

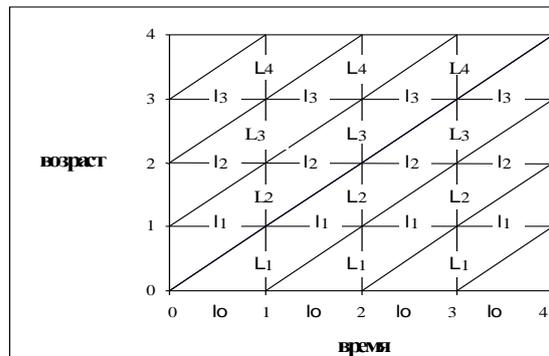


Рис. 3.2. Диаграмма Лексиса для стационарного населения.

4). Общая численность как условного, так и реального поколений равна числу родившихся в стационарном населении, умноженному на среднюю продолжительность предстоящей жизни при рождении:  $T(0)=E(0)*I(0)$ . Это определение вытекает из определения ожидаемой продолжительности жизни и интерпретации функции  $T(x)$  в модели стационарного населения.

5). В средний возраст умерших стационарного населения равен ожидаемой продолжительности предстоящей жизни при рождении. Это свойство непосредственно вытекает из определения соответствующих показателей в таблицах смертности.

$$E(0) = \sum_0^{\infty} \frac{x * d(x)}{I(0)}$$
, где  $x$  – средний возраст смерти в интервале  $(x, x+1)$ . В реальном населении средний возраст умерших отличается от ожидаемой продолжительности предстоящей жизни из-за того, что он аккумулирует в себе колебания чисел родившихся и особенности возрастной структуры умерших, отличающейся от структуры умерших в стационарном населении.

#### 3.4. ПРИЛОЖЕНИЯ МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНОГО НАСЕЛЕНИЯ

Направления использования модели стационарного населения в демографических исследованиях:

- в качестве стандарта для сравнения смертности методом стандартизации;
- для изучения демографических характеристик реального населения применительно к традиционным аграрным обществам, поскольку их численность изменялась чрезвычайно медленно на протяжении длительных исторических периодов;
- в палеодемографических исследованиях;

- для построения таблиц смертности по возрастному распределению умерших (метод смертных списков);
- гипотеза стационарности может быть использована при разработке долгосрочных демографических прогнозов.

Границы применения модели стационарного населения значительно расширятся, если мы расширим само понятие «население». Под «населением» можно понимать не только численность людей, проживающих на определенной территории, но и численность персонала на предприятиях, учащихся школ и Вузов, клиентов страховых компаний и пенсионных фондов, пациентов больниц и др. Кроме человеческой популяции, существуют популяции в животном мире. Также можно говорить о «населении» применительно к различным совокупностям, состоящим из неодушевленных объектов: станочный парк, автомобильный парк, товары на складе и др. Многие из этих совокупностей в большей степени удовлетворяют условиям стационарности, чем реальные населения регионов и стран. В целом, совокупности, для которых можно построить модель стационарного населения (или таблицу смертности) обладают одним общим свойством. Выбытие элемента из совокупности, подобно смерти, представляет собой неповторяющееся событие, интенсивность которого зависит от возраста элемента.

**Пример 1<sup>37</sup>. Применение модели стационарного населения в управлении персоналом.** В большинстве задач, связанных с изменением численности персонала, работающего на фирме, под выбытием подразумевают смерть, увольнение или уход на пенсию. Коэффициенты выбытия могут зависеть как от возраста работающего, так и от стажа работы (в некоторых случаях только от последнего показателя).

**Задача.** Даны сведения о коэффициентах выбытия работников на двух крупных фирмах в зависимости от стажа работы. Посчитайте для каждой фирмы:

- 1) Средний стаж работы одного работника.
- 2) Сколько работников ежегодно необходимо нанимать, чтобы общая численность персонала сохранялась в размере 1500 человек.

Стаж работы, лет	Коэффициенты выбытия	
	Фирма А	Фирма В
0	0.50	0.667
1	0.50	0.500
2	0.50	0.300

<sup>37</sup> Примеры взяты из книги: Pollard A.H., Yusuf F., Pollard G.N. Demographic Techniques. – Pergamon Press, 1974. – pp. 43, 46

3	0.50	0.250
4	0.50	0.200
5	0.50	0.067
6	0.50	1.000
7	0.50	
8	0.50	
9	0.50	

Решение: Построим таблицу, аналогичную таблице смертности, где в качестве вероятности смерти в возрасте  $x$  лет будет выступать вероятность выбыть, проработав  $x$  лет (т.е. коэффициент выбытия при стаже работы  $x$  лет). Предполагая, что выбытия распределены равномерно в течение года, получим следующую таблицу:

стаж работы, лет	Фирма А			Фирма В		
	$l_x$	$L_x$	$T_x$	$l_x$	$L_x$	$T_x$
0	1000	750	1498	1000	667	1339
1	500	375	748	333	250	672
2	250	188	373	166	141	422
3	125	94	185	116	102	281
4	62	46	91	87	78	179
5	31	23	45	70	68	101
6	16	12	22	65	33	33
7	8	6	10	0	0	0
8	4	3	4			
9	2	1	1			
10	1	0	0			

Средний стаж работы равен  $\frac{T_0}{l_0}$ . Такой средний стаж работы для работников фирмы А составляет приблизительно 1,5 года, а для работников фирмы В 1,3 года.

Ежегодный прием на службу составляет  $l_0$ , или 1000 новых работников и обеспечивает общую численность персонала в  $T_0$ , или 1498 человек для компании А и 1339 человек для компании В. Таким образом, если требуется поддерживать численность персонала в 1500 человек, то ежегодно компания А должна нанимать:

$$1000 \times \frac{1500}{1498} = 1001 \text{ человек; компания В: } 1000 \times \frac{1500}{1339} = 1120 \text{ человек.}$$

### Пример 2. Применение модели стационарного населения в теории замещения

Стандартной управленческой проблемой является определение скорости износа одних предметов, которые необходимо заменить другими. Например, замена проданных акций новыми, замена вышедших из строя машин и замена одних пациентов другими в больнице.

**Задача.** В родильном доме за неделю рождается 10 младенцев, 30% из них покидают роддом в течение недели; 10% оставшихся младенцев в возрасте 1 недели покидают больницу до исполнения 2-х недель; 20% оставшихся – до исполнения 3-х недель; 40% оставшихся – до исполнения 4-х недель; 70% оставшихся – до исполнения 5-ти недель, а все остальные покидают роддом до 6-недельного возраста. Какое количество коек необходимо для размещения детей?

*Решение:* В данном случае построим таблицу выживания по аналогии с таблицей смертности и запишем результат:

$x$	$l_x$	$d_x$	$q_x$	$L_x$	$T_x$
0	100	30	0,3	85,0	272,7
1	70	7	0,1	66,5	187,7
2	63	12,6	0,2	56,7	121,2
3	50,4	20,2	0,4	40,3	64,5
4	30,2	21,1	0,7	19,6	24,2
5	9,1	9,1	1	4,6	4,6
6	0				

Поскольку еженедельно рождается 10 младенцев, то численность стационарного населения составит  $\frac{10}{l_0} \times T_0 = \frac{10}{100} \times 262,7 \approx 26$  человек.

### ЗАДАЧИ

#### Задача 1

I) Пусть А и В – два случайно выбранных человека, доживших, соответственно, до возрастов а и b. Смертность в данном населении задана таблицей смертности. Запишите в терминах таблицы смертности следующие выражения:

- 1) Вероятность того, что А будет в живых к своему (а+n) дню рождения
- 2) Вероятность того, что оба будут живы в возрасте (а+n) и (b+n)

II) Пусть А и В – супруги. В момент брака мужу (А) было в точности 25 лет, жене (В) - в точности 20 лет. Запишите:

- 1) вероятность того, что оба будут живы 40 лет спустя;
- 2) вероятность того, что муж овдовееет к этому сроку (через 40 лет);
- 3) вероятность того, что овдовееет жена.

#### Задача 2

Чему равно произведение  $p_0 * p_1 * \dots * p_{n-1}$ ?

#### Задача 3

Покажите, что парадокс младенческой смертности проявляется при следующем условии:  $q_x > \frac{1}{E_x + 0,5}$ , что возможно только в младенческих и детских возрастах.

#### Задача 4

Ожидаемая продолжительность жизни при рождении равна 68,89 лет, в возрасте 75 лет – 8,7 года. Число родившихся равно 100.000, число доживших до возраста 75 лет равно 48,17. Какова доля стационарного населения в возрасте 75 лет и старше?

#### Задача 5

В стационарном населении число родившихся равно 100.000, ожидаемая продолжительность жизни при рождении составила 68,23 года, ожидаемая продолжительность жизни для доживших до 75 лет равна 8,52. Доля населения в возрастах 75 лет и старше равна 6%. Сколько человек в этом поколении доживает от рождения до точного возраста 75 лет?

#### Задача 6<sup>38</sup>

В населении ежегодное число рождений постоянно. Смертность снижалась вплоть до исчезновения экзогенных смертей. Коэффициент детской смертности равен 10 промилле. В возрастах от 1 года до 20 лет смертность равна нулю. Ожидаемая продолжительность жизни для доживших до 20 лет равна 60 годам. Найдите ожидаемую продолжительность предстоящей жизни при рождении.

#### Задача 7. Анализ смертности населения России

- 1) На основе приведенных в таблице коэффициентов смертности постройте краткие таблицы смертности мужского и женского населения России за 1897, 1989 и 2000 гг. Уточните гипотезы, которые используются Вами при построении таблиц. Для расчета таблиц воспользуйтесь формулой Гревилла.
- 2) Постройте и проанализируйте графики функций  $l[x]$ ,  $q[x]$  (используйте логарифмическую шкалу),  $d[x]$ ,  $e[x]$ ,  $m[x]$ .
- 3) Рассчитайте отсроченную продолжительность жизни в репродуктивном возрасте для женщин (от 15 до 49 лет).

<sup>38</sup> R. Pressat *Pratique de la démographie*. Trente sujets d'analyse. Dunod, Paris, 1967. p. 73 - 77

Проанализируйте полученные результаты и дайте ответы на следующие вопросы:

- В каких возрастных группах снижение или рост смертности были наибольшими за период 1897 – 1989 гг. и за период 1989 – 2000 гг. Как изменилось повозрастная смертность мужчин и женщин с 1989 по 2000 гг.?
- Как изменился разрыв в продолжительности жизни мужчин и женщин за указанный период, в населении в целом и в отдельных возрастах?
- Как изменилась отсроченная продолжительность предстоящей жизни для трудоспособных возрастов? Наблюдается ли в этой области прогресс? Как изменилась отсроченная продолжительность жизни женщин в репродуктивных возрастах?
- Какие демографические и социально-экономические факторы лежат в основе произошедших и происходящих изменений?
- Наблюдался и наблюдается ли в России парадокс младенческой и детской смертности?
- Закончился ли в России эпидемиологический переход?

Таблица. Возрастные коэффициенты смертности населения России (на 1000 человек каждой возрастной группы)

возрастные группы	Коэффициенты смертности					
	мужчины			женщины		
	$nM_x$	$nM_x$	$nM_x$	$nM_x$	$nM_x$	$nM_x$
	1897	1989	2000	1897	1989	2000
0	352,2	17,8	17,3	298,1	16,5	13,2
1-4	60,0	1,3	1,1	57,2	1,1	0,9
5-9	13,0	0,7	0,6	12,7	0,4	0,4
10-14	5,5	0,6	0,6	5,5	0,3	0,3
15-19	5,5	1,5	2,2	5,9	0,6	0,8
20-24	7,1	2,6	5	7,3	0,7	1,2
25-29	7,6	3,3	6	8,2	0,8	1,4
30-34	8,5	4	7	9,2	1	1,8
35-39	9,9	5,2	9,1	10,4	1,5	2,4
40-44	12,7	7,1	12,6	12,0	2,3	3,4
45-49	16,3	11	17,7	14,6	3,6	5,1
50-54	21,4	15,2	24,4	19,3	5,2	7,6
55-59	28,3	22,6	33,7	27,6	8,4	11,5
60-64	38,7	32,6	45	39,4	13,2	15,9
65-69	57,7	45,3	60,4	58,8	21,6	25,7
70-74	77,2	67,8	81,5	75,0	36,8	41
75-79	101,7	98,1	103,7	99,5	61,2	66,9
80-84	127,1	144,7	145,8	177,1	102,8	112,7
85+	157,5	224,5	200,4	119,0	192,4	207,9

Источник: данные Госкомстата России



1	702	?	?	?	?	?	30359	?
5	?						27844	50,5

С)

x	$l_x$	${}_nq_x$	${}_np_x$	${}_nd_x$	${}_nL_x$	${}_nm_x$	$T_x$	$E_x$
75	1715	0,3245	?	?	7183	?	15320	?
80	?						?	?

**Задача 10**

В одной системе координат нарисуйте графики основных функций таблицы смертности двух населений, находящихся в начале и в конце эпидемиологического перехода. Прокомментируйте разницу.

**Задача 11**

На основе данных о возрастном распределении умерших мужчин в Москве в 1875 году постройте таблицу смертности методом смертных списков. Какие гипотезы положены Вами в основу расчетов?

Возрастные группы	Число умерших в возрастной группе
0	4478
1 – 4	1093
5 – 9	184
10 – 14	191
15 – 19	350
20 – 29	1037
30 – 39	1113
40 – 49	1137
50 – 59	931
60 – 69	624
70 – 79	386
80 лет и старше	89
Итого умерших	11613

**Задача 12\*. Построение таблицы смертности в закрытом населении<sup>39</sup>**

Данные об очень старых, получаемые на основе переписей населения, часто содержат ошибки (пропуски, неточно указанный возраст). Иногда приходится использовать данные текущего учета смертей, чтобы восстановить численность некоторых поколений.

На основе данных о числе умерших, приведенных в таблице:

<sup>39</sup> Dittgen A., Lamy-Festy M. Travaux pratiques d'analyse démographique. – Paris, 1989, p. 12 - 13

- 1) восстановите численность женских поколений 1866-1870 гг., начиная с точного возраста 85 лет;
- 2) постройте таблицу смертности для этого поколения, рассчитав сначала вероятности умереть, затем числа умерших и числа доживающих до точного возраста (считая, что в точном возрасте 85 лет было 100 000 доживающих);
- 3) покажите, как построить таблицу смертности, не прибегая к вероятностям;
- 4) рассчитайте ожидаемую продолжительность жизни в возрасте 85 лет, предположив, что средний возраст смерти в интервале от  $x$  до  $x+1$  равен  $x+0,5$ . К какой ошибке приводит использование здесь этой формулы? Почему? Переделайте расчеты, используя следующие средние возраста смерти: для интервалов от 85 до 95 лет –  $(x+0,48)$ , для возрастов 95 лет и старше –  $(x+0,45)$ ;
- 5) если бы население было открытым, к какой ошибке относительно вероятностей привело бы использование подобной методики?

Возраст, исполнившихся лет	Число смертей
85	21796
86	19313
87	16618
88	13987
89	12190
90	9710
91	8247
92	6617
93	5272
94	3879
95	2921
96	1950
97	1392
98	931
99	647
100	369
101	266
102	156
103	71
104	62
105	19
106	6
107	4
108	2

*Задача 13*<sup>40</sup>

Мы располагаем началом чистой таблицы смертности поколения:

точный возраст	числа доживающих до точного возраста
0	10000
1	8500
2	8000
3	7700
4	7500
5	7400

- 1) Дайте определение таблицы, с которой Вы имеете дело:  
таблица единственного выбытия –  
«чистая таблица» –  
полная таблица –
- 2) Рассчитайте начало этой таблицы смертности;
- 3) Представьте на демографической сетке данные первых трех колонок этой таблицы;
- 4) Рассчитайте:
  - для доживших до точного возраста 1 год – вероятность умереть до достижения точного возраста 3 года;
  - для доживших до точного возраста 2 года – вероятность умереть до достижения точного возраста 5 лет;
  - для доживших до точного возраста 1 год – вероятность дожить по крайней мере до точного возраста 2 года;
  - для доживших до точного возраста 2 года – вероятность дожить по крайней мере до точного возраста 5 лет;
  - вероятность дожития от рождения до точного возраста 2 года и 5 лет.

*Задача 14*<sup>\*41</sup>

Мы располагаем данными о численности мужского поколения в точных возрастах.

Миграция отсутствует.

точный возраст	численность поколения
----------------	-----------------------

<sup>40</sup> Задача была предложена Г. Вуншем студентам Института Демографии Лувенского Католического университета

<sup>41</sup> Franck Cadier C. Démographie. Tome 1. – Paris: Economica, 1990. – pp. 69 – 75

0	35000
5	33810
10	33705
15	33670
20	33495
25	33250
30	32970
35	32620
40	32165
45	31465
50	30450
55	28805
60	26390
65	23100
70	18970
75	14070
80	8715
85	4025
90	1610
95	315
100	0

- 1) Рассчитайте краткую чистую таблицу смертности этого поколения, приняв за корень таблицы 100 000;
- 2) Кратко прокомментируйте эволюцию вероятности умереть с возрастом;
- 3) Дайте определение и рассчитайте показатели интенсивности и календаря смертности в этом поколении;
- 4) Рассчитайте вероятности дожить до точного возраста 25, 28 и 30 лет.

*Задача 15\**

В таблице даны повозрастные коэффициенты смертности мужчин и женщин (%).

возраст, исполнивших лет	мужчины	женщины
0	72,6	59,2
1-4	7,9	8,4
5-9	1,6	1,7
10-14	1,3	0,9
15-19	1,5	2,2
20-24	1,7	3,4
25-29	2,2	3,5
30-34	2,7	4,3
35-39	3,5	4,5
40-44	6,2	5,5

45-49	9,4	6
50-54	17,8	10,8
55-59	25,6	16,9
60-64	41	26,9
65-69	62,5	33,4
70-74	79,2	62,9
75-79	116,8	73,9
80-84	195	141,8
85+	300	486,7

1) Рассчитайте для каждого пола повозрастные вероятности умереть на основе экспоненциальной формулы:  ${}_n q_x = 1 - e^{-n \cdot m_x}$ . Изобразите эти вероятности на графике, используя логарифмическую шкалу, и прокомментируйте эволюцию смертности с возрастом;

2) Постройте таблицу смертности для каждого пола, ограничившись числами доживающих и умирающих;

3) Используя формулу средней, рассчитайте среднюю ожидаемую продолжительность жизни при рождении мужчин и женщин. Покажите, что в таблице смертности средняя продолжительность жизни при рождении равна среднему возрасту смерти.

#### Задача 16\*

Мы располагаем чистой таблицей смертности для мужчин. Корень таблицы равен 100000.

точный возраст	числа доживающих
50	67345
55	62205
60	55629
65	47179
70	37023
75	25638

1) Принимая во внимание, что предельный возраст равен 100 годам, рассчитайте среднюю продолжительность предстоящей жизни для доживших до точного возраста 50 лет;

2) Рассчитайте вероятность умереть между точными возрастами 50 и 55 лет. Какую гипотезу при этом Вы приняли во внимание?

3) Оцените на основе той же гипотезы коэффициент смертности между точными возрастными 50 и 55 лет;

4) Рассчитайте наилучшим возможным способом коэффициент смертности между точными возрастными 50 и 75 лет;

5) Преобразуйте этот коэффициент в вероятность. Сравните результат с табличной вероятностью умереть между точными возрастными 50 и 75 лет. Прокомментируйте полученный результат.

#### Задача 17

Покажите, что в стационарном населении общие коэффициенты рождаемости и смертности равны обратному значению ожидаемой продолжительности жизни при рождении.

#### Задача 18

Вероятности прекращения работы в зависимости от стажа работы на двух фабриках, производящих химикаты, приведены в таблице. Как соотносится средний стаж работы на фабриках при условии, что ежегодно на работу на фабриках принимается одинаковое количество рабочих, и персонал достиг стационарного состояния?

стаж работы	Фабрика 1	Фабрика 2
менее 1 года	0,5	0,5
1	0,5	0,25
2	0,5	1
3	1	

#### Задача 19

Даны сведения о коэффициентах выбытий персонала на двух фирмах в зависимости от стажа работы. Посчитайте для каждой фирмы:

- Средний стаж работы одного работника
- Сколько работников ежегодно необходимо нанимать, чтобы общая численность персонала сохранялась в размере 1200 человек

стаж работы	коэффициенты выбытия	
	А	Б
0	0,6	0,2
1	0,6	0,2
2	0,6	0,2

3	0,6	0,2
4	0,6	0,2
5	0,6	0,2

*Задача 20<sup>42\*</sup>*

Известно, что фирма ежегодно набирает 400 служащих в точном возрасте 18 лет. Персонал фирмы достиг стационарного состояния, и его динамика описывается приведенным фрагментом таблицы смертности. Рассчитайте:

- 1) Сколько среди персонала лиц в возрасте 50-65 лет?
- 2) Если на фирме уходят на пенсию в 65 лет, то сколько человек уходит на пенсию ежегодно?
- 3) Какова общая численность персонала, занятого на фирме?
- 4) Если в возрасте 21 год дополнительно 10% персонала увольняется, каковы будут ответы на первые три вопроса?

x	$l_x$	$d_x$	$q_x$	$p_x$	$L_x$	$T_x$	$E_x$
18	96541	157	0,001630	0,998370	96463	5042293	52,23
21	96049	163	0,001700	0,998300	95968	4753399	49,49
50	88473	711	0,008040	0,991960	88118	2046228	23,13
65	67699	2338	0,034540	0,965460	66530	844586	12,48

*Задача 21<sup>43\*</sup>*

Известно, что фирма ежегодно набирает служащих в возрасте 20 лет (равномерно в течение года), весь персонал фирмы в любой момент времени насчитывает 1000 человек и достиг стационарного состояния, его динамика описывается приведенным ниже фрагментом таблицы смертности.

Известно также, что дополнительно увольняется ежегодно 15% достигших возраста 21 год, 10% достигших возраста 22 года и 5% достигших возраста 23 года. После 23-летнего возраста никто не увольняется. Кроме того, выходят на пенсию: в возрасте 55 лет – 10%, в возрасте 60 лет – 40%, и в возрасте 65 лет – 100%.

Определите:

- 1) Ежегодное число увольняющихся;
- 2) Ежегодную численность уходящих на пенсию.

<sup>42</sup> Pollard A.H., Yusuf F., Pollard G.N. Demographic Techniques. – Pergamon Press, 1974. – p. 44

<sup>43</sup> Pollard A.H., Yusuf F., Pollard G.N. Demographic Techniques. – Pergamon Press, 1974. – p. 45

x	$l_x$	$d_x$	$q_x$	$p_x$	$L_x$	$T_x$	$E_x$
20	96215	166	0,001730	0,998270	96132	4849531	50,4
21	96049	163	0,001700	0,998300	95968	4753399	49,49
22	95886	158	0,001650	0,998350	95807	4657431	48,57
23	95728	151	0,001580	0,998420	95563	4561624	47,65
55	84142	1127	0,013390	0,986610	83579	1613885	19,18
60	77456	1685	0,021760	0,978240	76614	1208805	15,61
65	67699	2338	0,034540	0,965460	66530	844586	12,48

*Задача 22*

Известно, что домоуправление набирает ежегодно работников в возрасте 55 лет. Весь персонал домоуправления составляет 150 человек и достиг стационарного состояния. Эволюция численности персонала описывается приведенным ниже фрагментом полной таблицы смертности. Для данного домоуправления определите численность персонала в возрасте от 55 до 70 лет при условии, что ежегодно увольняется 20% достигших точного возраста 58 лет и 50% достигших точного возраста 60 лет. В возрасте 75 лет увольняются все.

x	$l_x$	$d_x$	$q_x$	$L_x$	$T_x$
55	84142	1127	0,01339	83579	1613885
58	80459	1442	0,01792	79738	1366780
60	77456	1685	0,02176	76614	1208805
70	54944	2844	0,05177	53522	536944
75	39984	3124	0,07814	38422	298960

*Задача 23*

Население некоторой страны достигло стационарного состояния. Эволюция населения этой страны описывается полной таблицей смертности, фрагмент которой приведен ниже. Ежегодно в данной стране рождается 1000 детей, миграция отсутствует. Право участвовать в голосовании в данной стране – с возраста 21 год. Предположим, что в стране две политические партии, и 60% выборщиков в возрасте от 21 года до 45 лет и 40% в возрасте старше 45 лет поддерживают партию А, остальные – партию Б. У какой партии поддержка большинства населения? Как изменится соотношение политических сил, если возраст голосования снизить до 18 лет? Какая доля выборщиков голосует впервые, если выборы проходят каждые пять лет?

x	$l_x$	$d_x$	$q_x$	$L_x$	$T_x$
18	96541	157	0,00163	96463	5042293
21	95432	140	0,00147	95362	4370467
26	95292	138	0,00145	95223	4275105

45	91165	442	0,00485	90944	2495831
----	-------	-----	---------	-------	---------

*Задача 24*

Население некоторой страны достигло стационарного состояния. Эволюция населения этой страны описывается полной таблицей смертности, фрагмент которой приведен ниже. Ежегодно в данной стране рождается 1000 детей, миграция отсутствует. Ежегодное пособие на ребенка, не достигшего совершеннолетия (0 – 15 лет), составляет 250\$. Каждая семья молодоженов, вступивших в первый брак, получает 500\$, причем все вступают в брак по достижении 25 лет. Все пожилые, достигшие 65 лет, получают ежегодную пенсию 1000\$. Кроме того, 50\$ выплачивается в случае смерти до возраста 10 лет и 100\$ – от возраста 10 лет и старше. Для данного населения рассчитайте затраты бюджета на ежегодные социальные выплаты.

x	$l_x$	$d_x$	$q_x$	$L_x$	$T_x$
0	100000	2239	0,02239	98881	6791916
10	97062	40	0,00041	97042	5817155
15	96825	73	0,00075	96789	5332388
25	95432	140	0,00147	95362	4370467
65	67699	2338	0,03454	66530	844586

*Задача 25<sup>44</sup>*

Рассчитайте коэффициент детской смертности во Франции в 1980 году, зная, что в этот год было 8010 детских смертей, из которых 6810 относятся к поколению родившихся в том же году численностью 800376 человек и 1200 – к поколению 1979 года численностью 757354 человека, и что миграцией можно пренебречь.

Постройте таблицу детской смертности по возрасту, исчисляемому в месяцах этого года, основываясь на детальных данных, приведенных ниже. Представьте эти данные на демографической сетке. Неравную длину месяцев не учитывайте.

Как определить число родившихся, на основании которого можно рассчитать коэффициент смертности в возрасте 0 исполнившихся месяцев как отношение смертей в этом возрасте к числу родившихся? Какую ошибку мы допускаем в расчете этого коэффициента, относя смерти к рожденьям 1980 года? Сделайте эти расчеты.

Рассчитайте коэффициент для возраста «0 исполнившихся месяцев», отнеся смерти в этом возрасте к рожденьям с декабря 1979 года по ноябрь 1980 года; коэффициент для возраста «1 исполнившийся месяц», отнеся смерти в этом возрасте к рожденьям с ноября 1979 года по октябрь 1980 года и т.д.

<sup>44</sup> Dittgen A., Lamy-Festy M. Travaux pratiques d'analyse démographique. – Paris, 1989. p. 19 - 20

Постройте соответствующую таблицу смертности.

Сравните табличные показатели с коэффициентами младенческой смертности.

детские смерти 1980 года по возрасту в месяцах		месяц	рождения по месяцам года	
возраст	число смертей		1979	1980
0	4673	январь	59981	63538
1	802	февраль	55932	60354
2	721	март	63479	67017
3	500	апрель	66351	68442
4	341	май	70959	73984
5	229	июнь	65426	67896
6	178	июль	66988	71028
7	171	август	62044	67362
8	119	сентябрь	60918	65719
9	110	октябрь	63552	67243
10	76	ноябрь	59927	62887
11	90	декабрь	61797	64906
всего	8010	всего	757354	800376

#### Задача 26

На основе данных, приведенных в таблице, постройте таблицы смертности мужчин, принадлежащих к разным социальным группам. Сравните смертность занятых умственным и физическим трудом. Рассчитайте и сравните вероятности дожития от 20 до 70 лет и отсроченную продолжительность жизни в интервале возраста 20 – 69 лет.

Возрастные коэффициенты смертности мужчин в 1989 году в России (на 100 тыс. человек):

Возрастные группы	Занятые преимущественно физическим трудом	Занятые преимущественно умственным трудом
20 – 24	126	241
25 – 29	113	300
30 – 34	144	369
35 – 39	170	439
40 – 44	273	650
45 – 49	446	974
50 – 54	614	1263
55 – 59	940	1722
60 – 64	688	1138

Источник: *Неравенство и смертность в России / Под ред. В. Школьниковой, Е. Андреевой, Т. Малевой. – М.: Сигнал, 2000. – с. 99*

#### Задача 27

На основе данных, приведенных в таблице, постройте таблицы смертности мужчин с разным уровнем образования. Проанализируйте зависимость уровня смертности от

образования. Рассчитайте и сравните вероятности дожития от 20 до 70 лет и отсроченную продолжительность жизни в интервале возраста 20 – 69 лет.

Возрастные коэффициенты смертности мужчин в 1989 году в России (на 100 тыс. человек):

Возрастные группы	Высшее и незаконченное высшее	Среднее специальное	Среднее общее	Неполное среднее	Начальное и ниже
20 – 24	101	173	248	371	876
25 – 29	103	192	325	540	817
30 – 34	137	240	388	638	784
35 – 39	170	456	457	690	715
40 – 44	284	436	716	952	830
45 – 49	506	703	1191	1447	913
50 – 54	777	959	1738	2060	1199
55 – 59	1345	1561	3105	3440	1732
60 – 64	2042	2352	4473	4048	2907

Источник: *Неравенство и смертность в России /Под ред. В. Школьниковой, Е. Андреевой, Т. Малевой. – М.: Сигнал, 2000. – с. 99*

#### Задача 28

На основе данных, приведенных в таблице, постройте таблицы смертности женщин в зависимости от состояния в браке. Проанализируйте влияние состояния в браке на смертность. Рассчитайте и сравните вероятности дожития от 20 до 70 лет и отсроченную продолжительность жизни в интервале возраста 20 – 69 лет.

Возрастные коэффициенты смертности женщин в 1989 году в России (на 100 тыс. человек):

Возрастные группы	Состоящие в браке	Никогда не состоявшие в браке	Вдовы	Разведенные
20 – 24	50	100	447	69
25 – 29	59	164	239	98
30 – 34	81	254	180	129
35 – 39	123	395	224	180
40 – 44	189	559	310	237
45 – 49	315	1012	427	355
50 – 54	462	1320	572	483
55 – 59	775	1781	907	727
60 – 64	1216	2205	1393	1076

Источник: *Неравенство и смертность в России /Под ред. В. Школьниковой, Е. Андреевой, Т. Малевой. – М.: Сигнал, 2000. – с. 100*

#### Задача 29

В таблице приведены числа доживающих до точных возрастов  $l_x$  из таблиц смертности ряда областей России в 1992 году (мужчины, все население).

- 1) рассчитайте остальные показатели таблиц смертности;
- 2) определите отсроченную продолжительность жизни в трудоспособном возрасте и оцените потери в продолжительности рабочего периода из-за высокой смертности мужчин в трудоспособных возрастах;
- 3) определите потери человеко-лет жизни в трудоспособных возрастах для каждого 100000 мужского населения.

Точный возраст $x$	Архангельская	Калужская	г. Москва	Северная Осетия	Тува
0	100000	100000	100000	100000	100000
1	98295	98133	98242	98204	96694
5	97805	97859	97878	97730	95744
10	97366	97405	97560	97476	95186
15	96953	97176	97249	97203	94508
20	95959	96310	96502	96409	92364
25	94307	95013	95150	94887	87936
30	92370	92940	93448	92766	83668
35	89714	90581	91249	90258	79262
40	86365	87857	88417	87562	75427
45	81377	83663	84432	83688	69921
50	75964	78763	79264	78932	63659
55	67525	71219	72078	73589	57929
60	58617	62335	63992	65833	50071
65	47492	46456	53299	55938	40211
70	34995	35952	41748	45544	30148
75	23383	24817	30208	33071	19634
80	12972	14402	18799	20618	11477
85	5968	6782	9021	10769	5569

*Задача 30*

На основе таблиц смертности мужчин и женщин в 1897, 1926 и 2000 годах

(Приложение 1):

- рассчитайте вероятность для мужчины 30 лет дожить до 45-летнего возраста;
- рассчитайте вероятность для женщины 25 лет дожить до 40-летнего возраста.

Предполагая, что мужчина и женщина вступили в брак в 30 и 25 лет соответственно,

рассчитайте:

- вероятность для обоих прожить 15 лет после заключения брака;
- вероятность для обоих не дожить до 15-летней годовщины свадьбы;
- вероятности того, что жена овдовеет в течение первых 5, 10 и 15 лет брака;
- вероятности того, что муж овдовеет в течение первых 5, 10 и 15 лет брака.

Сравните полученные результаты.

Предположив, что данный брак может прекратиться только в результате смерти одного из супругов (развод отсутствует), определите число человеко-лет, прожитых женщиной в браке в репродуктивном возрасте. Сравните полученные результаты.

#### Задача 31

На основе возрастных вероятностей умереть мужчин и женщин в Индии в 1970 – 1972 гг., приведенных в таблице, рассчитайте остальные показатели таблиц смертности и сравните смертность мужчин и женщин.

Точный возраст x	мужчины	женщины
0	0,12066	0,12405
1	0,10236	0,13181
5	0,02450	0,03024
10	0,01040	0,01366
15	0,01183	0,01947
20	0,01519	0,02699
25	0,01691	0,02703
30	0,02079	0,03194
35	0,02685	0,03363
40	0,04128	0,03881
45	0,05892	0,05284
50	0,09365	0,07900
55	0,12778	0,12132
60	0,19538	0,17513
65	0,25909	0,25129
70	0,34555	0,34845
75	0,44131	0,46192
80	0,54148	0,58164

Источник: *Model Life Tables for developing countries.* – United Nations, N.-Y., 1982. – p. 304

#### Задача 32

На основе чисел доживающих до точных возрастов мужчин и женщин еврейского и нееврейского населения Израиля 1971 – 1973 гг., приведенных в таблице, рассчитайте остальные показатели таблиц смертности и сравните смертность мужчин и женщин еврейского и нееврейского населения.

Точный возраст x	Еврейское население		Нееврейское население	
	мужчины	женщины	мужчины	женщины
0	100000	100000	100000	100000
1	97933	98346	95720	96559
5	97640	98091	94943	95741
10	97401	97909	94564	95478

15	97197	97772	94266	95225
20	96784	97572	93702	94845
25	96200	97329	92909	94372
30	95749	97032	92044	93868
35	95162	96625	90977	93264
40	94314	96067	89506	92502
45	93016	95158	87557	91435
50	90899	93693	84865	89758
55	87549	91226	81064	86857
60	82355	87240	75236	82087
65	74427	80801	67209	75340
70	63052	70845	56929	65645
75	47069	55051	43227	51035
80	29852	36701	27416	32254
85	15321	19875	13116	14708

Источник: *Model Life Tables for developing countries.* – United Nations, N.-Y., 1982. – pp. 320, 322.

### Задача 33

В Москве в 1997 году по данным Мосгорстата средняя ожидаемая продолжительность жизни при рождении  $E_0$  составила у мужчин 62,8 года, у женщин – 73,4 года. Имея повозрастное распределение умерших в 1997 году, рассчитайте средний возраст умерших и объясните расхождения с величинами ожидаемой продолжительности жизни.

Распределение умерших в Москве в 1997 году по полу и возрасту:

возраст	мужчины	женщины
<b>0</b>	572	403
<b>1</b>	36	47
<b>2</b>	28	17
<b>3</b>	16	16
<b>4</b>	19	15
<b>5</b>	25	5
<b>6</b>	15	10
<b>7</b>	14	9
<b>8</b>	18	13
<b>9</b>	23	13
<b>10</b>	22	11
<b>11</b>	19	11
<b>12</b>	24	7
<b>13</b>	19	23
<b>14</b>	38	14
<b>15</b>	50	28
<b>16</b>	62	45

<b>17</b>	87	46
<b>18</b>	130	48
<b>19</b>	155	69
<b>20</b>	187	66
<b>21</b>	232	52
<b>22</b>	230	57
<b>23</b>	245	57
<b>24</b>	238	74
<b>25</b>	243	53
<b>26</b>	257	73
<b>27</b>	271	47
<b>28</b>	224	58
<b>29</b>	267	57
<b>30</b>	293	81
<b>31</b>	276	71
<b>32</b>	287	80
<b>33</b>	298	78
<b>34</b>	328	118

35	495	130	70	1958	1746
36	442	140	71	1660	1829
37	416	135	72	1392	2018
38	497	141	73	1266	2174
39	536	157	74	1056	2125
40	659	193	75	923	1931
41	637	221	76	946	1727
42	617	220	77	877	1700
43	624	242	78	826	1854
44	582	279	79	792	1709
45	714	282	80	682	1619
46	742	289	81	777	1982
47	766	324	82	1006	2594
48	833	348	83	991	2839
49	801	322	84	937	2716
50	1108	475	85	865	2600
51	826	324	86	724	2299
52	625	255	87	590	1938
53	460	207	88	495	1734
54	447	194	89	444	1521
55	961	420	90	334	1287
56	1073	454	91	273	1001
57	1206	598	92	203	761
58	1397	690	93	132	619
59	1500	726	94	115	456
60	1561	836	95	48	371
61	1191	694	96	45	242
62	990	631	97	40	149
63	1047	677	98	20	76
64	1151	805	99	7	43
65	1445	1014	100	12	83
66	1542	1163	Возраст неизвестен	226	78
67	1627	1235	итого	59047	65601
68	1741	1447			
69	1878	1640			

*Задача 34*

На основе таблиц смертности населения России 2000 года (Приложение 1) определите доли в стационарном населении:

- 1) численность детей школьного возраста 7 – 17 лет (мальчиков и девочек);
- 2) численность призывников в возрасте 18 лет;
- 3) численности трудоспособного населения (мужчин 15 – 59 лет и женщин 15 – 54 лет).

*Задача 35*

В таблице приведены возрастные структуры мужского населения в трудоспособном возрасте в 1989 и 2000 гг. в России. На основе решения Задачи 6 рассчитайте среднюю продолжительность рабочего периода для соответствующих возрастных групп. Рассчитайте потенциальный календарный фонд времени мужчин трудоспособного возраста в 1989 и 2000 годах. Как изменился общий фонд рабочего времени за этот период? Рассчитайте вклад различных возрастных групп в эти изменения.

Возрастные группы	Численность мужчин		Потенциальная средняя продолжительность рабочего периода мужчин, лет (из Задачи 6)		Потенциальный календарный фонд времени мужчин трудоспособного возраста, человеко-лет	
	1989	2000	1989	2000	1989	2000
20 – 24	4955983	5421826				
25 – 29	6373602	5238567				
30 – 34	6472839	4803986				
35 – 39	5821223	5904785				
40 – 44	3775717	6120680				
45 – 49	3767156	5396568				
50 – 54	4453975	3893468				
55 – 59	3719890	2522728				
60 – 64	3239655	3621358				
Итого:			-	-		

*Задача 36\*. Расчет таблицы смертности в закрытом населении<sup>45</sup>*

Для населения некоторого города известны следующие коэффициенты смертности:

x	${}_n m_x$	${}_n q_x$	$l_x$	${}_n d_x$	${}_n L_x$
0	0,07865				
1-4	0,00706				
5-10	0,00199				
9-14	0,0015				
15-19					

Предполагается, что в течение 15 лет повозрастная смертность не меняется.

Приняв необходимые гипотезы, рассчитайте:

<sup>45</sup> Задачи 36 и 37 были предложены Г. Вуншем студентам Института Демографии Лувенского Католического университета

- 1) вероятность дожить от рождения до точного возраста 15 лет
- 2) коэффициент смертности в интервале 0 - 15 лет
- 3) вероятность умереть между точным возрастом 3 и 5 лет

**Задача 37\***

На основе условий Задачи 36 и известного среднего значения численности населения в возрасте 5 – 10 лет (=157612), рассчитайте:

- 1) число родившихся  $N$
- 2) число смертей.

Для решения используйте демографическую сетку.

**Задача 38**

Докажите, что в таблице смертности ожидаемая продолжительность жизни при рождении равна среднему возрасту умерших.

**РЕШЕНИЯ****Решение Задачи 12**

1) Чтобы восстановить численность женских поколений 1866 – 1870 гг., начиная с точного возраста 85 лет, на основе смертей, приведенных в таблице, нужно рассчитать число накопленных смертей, начиная от самого старшего возраста. Численность поколения в возрасте 85 лет равна сумме всех умерших от возраста 85 до возраста 108 лет.

возраст	число смертей	численность поколения	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$x+0,5n$	$d_x^*(x+0,5n)$	$\frac{x+0,48n}{x+0,45n}$	$\frac{d_x^*(x+0,48n)}{d_x^*(x+0,45n)}$
85	21796	126425	0,1724	100000	17240	85,5	1474042	85,48	1473698
86	19313	104629	0,1846	82760	15276	86,5	1321396	86,48	1321090
87	16618	85316	0,1948	67483	13145	87,5	1150148	87,48	1149885
88	13987	68698	0,2036	54339	11063	88,5	979118	88,48	978896
89	12190	54711	0,2228	43275	9642	89,5	862966	89,48	862773
90	9710	42521	0,2284	33633	7680	90,5	695080	90,48	694926
91	8247	32811	0,2513	25953	6523	91,5	596876	91,48	596746
92	6617	24564	0,2694	19430	5234	92,5	484139	92,48	484034
93	5272	17947	0,2938	14196	4170	93,5	389901	93,48	389817
94	3879	12675	0,3060	10026	3068	94,5	289947	94,48	289886
95	2921	8796	0,3321	6957	2310	95,5	220649	95,45	220533
96	1950	5875	0,3319	4647	1542	96,5	148843	96,45	148766
97	1392	3925	0,3546	3105	1101	97,5	107352	97,45	107297
98	931	2533	0,3675	2004	736	98,5	72536	98,45	72499
99	647	1602	0,4039	1267	512	99,5	50921	99,45	50895

100	369	955	0,3864	755	292	100,5	29333	100,45	29319
101	266	586	0,4539	464	210	101,5	21356	101,45	21345
102	156	320	0,4875	253	123	102,5	12648	102,45	12642
103	71	164	0,4329	130	56	103,5	5813	103,45	5810
104	62	93	0,6667	74	49	104,5	5125	104,45	5122
105	19	31	0,6129	25	15	105,5	1586	105,45	1585
106	6	12	0,5000	9	5	106,5	505	106,45	505
107	4	6	0,6667	5	3	107,5	340	107,45	340
108	2	2	1,0000	2					

3) Чтобы получить ряд чисел доживающих без использования вероятностей, достаточно умножить численность поколения в каждом возрасте на  $100000/126425$

4) Ожидаемую продолжительность предстоящей жизни в возрасте 85 лет рассчитываем как среднюю взвешенную.  $e_{85}=4,21$  при наступлении смертей в середине возрастных интервалов, 4,18 – ближе к началу каждого интервала.

точный возраст	числа доживающих до точного возраста	$d_x$	$q_x$ (%)
0	10000	1500	150
1	8500	500	58,8
2	8000	300	37,5
3	7700	200	26,0
4	7500	100	13,3
5	7400		

3)

- для доживших до точного возраста 1 год вероятность умереть до достижения точного возраста 3 года:  $(500+300)/8500=0,094$
- для доживших до точного возраста 2 года вероятность умереть до достижения точного возраста 5 лет:  $(300+200+100)/8000=0,075$
- для доживших до точного возраста 1 год вероятность дожить по крайней мере до точного возраста 2 года:  $8000/8500=0,941$
- для доживших до точного возраста 2 года вероятность дожить по крайней мере до точного возраста 5 лет:  $7400/8000=0,925$
- вероятность дожития от рождения до точного возраста 2 года и 5 лет:  $8000/10000=0,800$  и  $7400/10000=0,740$ .

*Решение Задачи 14*

1) В этом поколении смертность наблюдается в чистом виде, так как миграция отсутствует. Поэтому для получения чисел доживающих достаточно привести численности поколения в разных возрастах к корню таблицы, умножив на  $l_0/P_0=100000/35000$ . Другой способ – рассчитать напрямую вероятности умереть, например  ${}_5q_0=(35000-33810)/35000=34\%$ .

точный возраст	численность поколения $P_x$	$l_x$	$d(x, x+5)$	${}_5q_x$	$x+0,5n$	$d(x, x+5)*(x+0,5n)$
0	35000	100000	3400	0,034	2,5	8500,0
5	33810	96600	300	0,003	7,5	2250,0
10	33705	96300	100	0,001	12,5	1250,0
15	33670	96200	500	0,005	17,5	8750,0
20	33495	95700	700	0,007	22,5	15750,0
25	33250	95000	800	0,008	27,5	22000,0
30	32970	94200	1000	0,011	32,5	32500,0
35	32620	93200	1300	0,014	37,5	48750,0
40	32165	91900	2000	0,022	42,5	85000,0
45	31465	89900	2900	0,032	47,5	137750,0
50	30450	87000	4700	0,054	52,5	246750,0
55	28805	82300	6900	0,084	57,5	396750,0
60	26390	75400	9400	0,125	62,5	587500,0
65	23100	66000	11800	0,179	67,5	796500,0
70	18970	54200	14000	0,258	72,5	1015000,0
75	14070	40200	15300	0,381	77,5	1185750,0
80	8715	24900	13400	0,538	82,500	1105500,0
85	4025	11500	6900	0,600	87,5	603750,0
90	1610	4600	3700	0,80	92,5	342250,0

				4		
95	315	900	900	1,00 0	97,5	87750,0
100	0	0				

3) Дайте определение и рассчитайте показатели интенсивности и календаря смертности в этом поколении. Интенсивность процесса характеризуется средним числом

событий, приходящимся на одного представителя поколения:  $\frac{\sum_{x=0}^w n d_x}{l_0} = 1$ . Календарь

процесса характеризуется средним возрастом наступления события в поколении, то есть в данном случае средним возрастом смерти, который можно рассчитать по формуле:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{x=0}^w n d_x \cdot (x + \frac{n}{2})}{\sum_{x=0}^w n d_x} = 67,3$$

4) Расчет вероятностей дожития от рождения до точных возрастов 25, 30 и 28 лет:

$${}_{25}p_0 = 95000/100\ 000 = 0,950$$

$${}_{30}p_0 = 94200/100\ 000 = 0,942$$

Чтобы рассчитать вероятность дожития от рождения до точного возраста 28 лет, необходимо рассчитать число доживающих до этого возраста. Число умерших в интервале возраста от 25 до 30 лет  ${}_5d_{25} = l_{25} - l_{30} = 800$ . Если допустить гипотезу равномерного распределения смертей в данном интервале, то получим, что в течение 1 года умирает в среднем  $800/5 = 160$  человек, а за три года (от 25 до 28 лет) – 480 человек. Откуда  $l_{28} = 94520$ . Вероятность дожить от рождения до 28 лет  ${}_{28}q_0 = 94520/100000 = 0,9452$ .

#### Решение Задачи 15

- 1) Рассчитаем табличные коэффициенты смертности, приведя исходные коэффициенты к 1 путем деления на 1000, а затем по приведенной формуле рассчитаем вероятности умереть.
- 2) Для расчета среднего возраста смерти найдем середины соответствующих интервалов. Средний возраст умерших найдем по формуле средней

взвешенной:  $\bar{x} = \frac{\sum_{x=0}^w n d_x \cdot (x + \frac{n}{2})}{\sum_{x=0}^w n d_x}$ . Средний возраст смерти мужчин равен 58,53

года, женщин – 61,49 года.

x	n <sub>m</sub> x - м	n <sub>m</sub> x - ж	n <sub>q</sub> x - м	n <sub>q</sub> x - ж	l <sub>x</sub> - м	l <sub>x</sub> - ж	n <sub>d</sub> x - м	n <sub>d</sub> x - ж	x+0,5n	n <sub>d</sub> x*(x+0,5n)	
										мужчины	женщины
0	0,0726	0,0592	0,07003	0,05748	100000	100000	7003	5748	0,5	3501,4	2874,1
1-4	0,0079	0,0084	0,03111	0,03304	92997	94252	2893	3114	2	5785,5	6228,5
5-9	0,0016	0,0017	0,00797	0,00846	90105	91138	718	771	7,5	5384,7	5785,4
10-14	0,0013	0,0009	0,00648	0,00449	89387	90366	579	406	12,5	7239,1	5071,7
15-19	0,0015	0,0022	0,00747	0,01094	88807	89960	664	984	17,5	11612,4	17222,5
20-24	0,0017	0,0034	0,00846	0,01686	88144	88976	746	1500	22,5	16786,1	33745,8
25-29	0,0022	0,0035	0,01094	0,01735	87398	87477	956	1518	27,5	26293,0	41731,8
30-34	0,0027	0,0043	0,01341	0,02127	86442	85959	1159	1828	32,5	37671,4	59422,8
35-39	0,0035	0,0045	0,01735	0,02225	85283	84131	1479	1872	37,5	55479,8	70192,6
40-44	0,0062	0,0055	0,03052	0,02713	83803	82259	2558	2231	42,5	108716,8	94830,1
45-49	0,0094	0,006	0,04591	0,02955	81245	80027	3730	2365	47,5	177183,2	112345,6
50-54	0,0178	0,0108	0,08515	0,05257	77515	77662	6601	4083	52,5	346538,7	214333,6
55-59	0,0256	0,0169	0,12015	0,08103	70914	73580	8520	5962	57,5	489905,6	342817,7
60-64	0,041	0,0269	0,18535	0,12585	62394	67618	11565	8509	62,5	722806,7	531843,5
65-69	0,0625	0,0334	0,26838	0,15380	50829	59108	13642	9091	67,5	920818,3	613633,7
70-74	0,0792	0,0629	0,32699	0,26985	37187	50017	12160	13497	72,5	881602,4	978531,9
75-79	0,1168	0,0739	0,44234	0,30892	25027	36520	11071	11282	77,5	857965,9	874345,7
80-84	0,195	0,1418	0,62281	0,50786	13957	25238	8692	12818	82,5	717125,5	1057461,7
85+	0,3	0,4867	0,77687	0,91227	5264	12421	5264	12421	87,5	460636,4	1086817,5

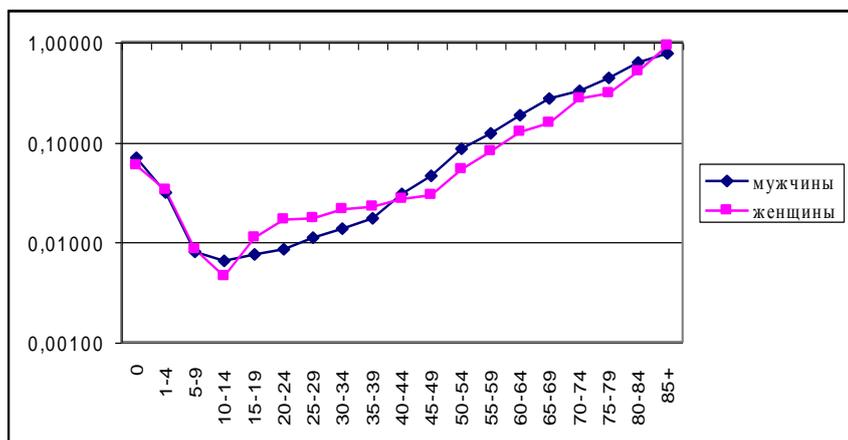


Рис. 3.3. Вероятности умереть мужчин и женщин

#### Решение Задачи 16

точный возраст	числа доживающих	n <sub>d</sub> x	n <sub>L</sub> x	x+0,5n
----------------	------------------	------------------	------------------	--------

	$l_x$			
50	67345	5140	323875	52,5
55	62205	6576	294585	57,5
60	55629	8450	257020	62,5
65	47179	10156	210505	67,5
70	37023	11385	156653	72,5
75	25638	25638	64095	87,5
100		0	0	

1) Чтобы рассчитать среднюю продолжительность предстоящей жизни для доживших до 50 лет, построим таблицу смертности, при расчете  ${}_nL_x$  предположив, что смерти распределены линейно в возрастных интервалах от  $x$  до  $x+n$ . Затем найдем  $e_{50}$  по формуле:  $e_{50} = T_{50}/l_{50} = ({}_5L_{50} + {}_5L_{55} + \dots + {}_5L_{75})/l_{50} = 1306733/67345 = 19,4$

2) Вероятность умереть между точными возрастами 50 и 55 лет рассчитаем по формуле:  $1 - l_{55}/l_{50} = 1 - 62205/67345 = 0,0763$ , предположив равномерное распределение смертей в интервале от 50 до 55 лет

3) Коэффициент смертности между точными возрастами 50 и 55 лет рассчитывается по формуле:  ${}_5m_{50} = {}_5d_{50}/{}_5L_{50} = 5140/323875 = 0,0159$

4) Чтобы рассчитать коэффициент смертности между точными возрастами 50 и 75 лет, найдем число умерших в этом интервале и разделим его на число человеко-лет, прожитых в интервале возраста 50 – 75 лет дожившими до точно возраста 50 лет. Воспользуемся формулой:  ${}_{25}m_{50} = (l_{50} - l_{75})/(T_{50} - T_{75}) = 0,0336$ .

5) Используя упрощенную формулу Кетле-Фарра, преобразуем этот коэффициент в вероятность:  ${}_{25}q_{50} = (2 * 25 * 0,0336)/(2 + 25 * 0,0336) = 0,5915$ . Вероятность умереть, рассчитанная на основе таблицы смертности как отношение чисел доживающих до точных возрастов 75 и 50 лет:  $25638/67345 = 0,3807$ .

#### Решение Задачи 20

Поскольку численность персонала достигла стационарного состояния, то структура персонала не меняется, и полученные ответы будут отличаться от результатов, рассчитанных по таблице смертности, на соотношение численностей нанимаемого персонала на фирме и  $l_{18}$  по таблице смертности:  $400/l_{18}$ .

1) Если ежегодно набирают  $l_{18}$  человек, то численность персонала в возрасте от 50 до 65 лет будет равна  $(T_{50} - T_{65})$ , а численность персонала на фирме  $(400/l_{18}) * (T_{50} - T_{65}) = 4979$ .

2) Ежегодно уходят на пенсию  $l_{65}$  человек.  $(400/l_{18}) * l_{65} = 280$ .

3) Набираемые ежегодно  $l_{18}$  человек формируют персонал в возрасте 18 – 65 лет общей численностью  $(T_{18}-T_{65})$ . Численность персонала фирмы составляет  $(400/l_{18}) \cdot (T_{18}-T_{65})=17392$

4) Если 10% 21-летних увольняется, то только 90% остается на фирме. Поэтому:

$$4.1. 0.9 \cdot 4979 = 4481$$

$$4.2. 0.9 \cdot 280 = 252$$

$$4.3. (400/l_{18}) \cdot ((T_{18}-T_{21}) + 0.9 \cdot (T_{21}-T_{65})) = 15773$$

#### Решение Задачи 21

Если бы ежегодно на фирме нанимали  $l_{20}$  человек, то численность персонала равнялась бы:

$$T = L_{20} + 0.85 \cdot L_{21} + 0.85 \cdot 0.9 \cdot L_{22} + 0.85 \cdot 0.9 \cdot 0.95 \cdot (T_{23}-T_{55}) + 0.85 \cdot 0.9 \cdot 0.95 \cdot (0.9 \cdot (T_{55}-T_{60}) + 0.9 \cdot 0.6 \cdot (T_{60}-T_{65})) = 2801155 \text{ человек.}$$

На деле численность персонала составляет 1000 человек, поэтому числа, полученные из расчетов на основе таблицы смертности, надо уменьшить в соотношении  $1000/2801155$ .

1) Численность увольняющихся ежегодно равна:

$$(1000/2801155) \cdot (0.15 \cdot l_{21} + 0.1 \cdot 0.85 \cdot l_{22} + 0.05 \cdot 0.9 \cdot 0.85 \cdot l_{23}) = 9$$

2) Численность ежегодно уходящих на пенсию равна:

$$(1000/2801155) \cdot (0.85 \cdot 0.9 \cdot 0.95 \cdot (0.1 \cdot l_{55} + 0.4 \cdot 0.9 \cdot l_{60} + 0.6 \cdot 0.9 \cdot l_{65})) = 273$$

#### Решение Задачи 36

x	${}_n m_x$	${}_n q_x$	$l_x$	${}_n d_x$	${}_n l_x$
0	0,07865	0.07567	100000	7567	96216
1-4	0,00706	0.02785	92433	2574	364584
5-10	0,00199	0.00990	89859	890	447070
9-14	0,0015	0.00747	88969	664	443185
15-19			88305		

1) Используем гипотезу равномерного распределения смертей в возрастных интервалах и достроим таблицу, применяя следующие формулы:

$${}_n q_x = \frac{2 \cdot {}_n m_x}{2 + {}_n m_x}; l_x \cdot q_x = {}_n d_x; l_x - {}_n d_x = l_{x+1}$$

${}_n L_x = \frac{n}{2}(l_x + l_{x+n})$  (при условии линейности функции дожития); то же самое можно

записать следующим образом:  $n \cdot l_{x+n} + \frac{n}{2}(l_x - l_{x+n})$ . Рассчитаем вероятность дожить от рождения до точного возраста 15 лет:

$${}_{15}P_0 = \frac{88305}{100000} = 0.88305$$

2) Добавим гипотезу закрытого населения (отсутствия миграции) и рассчитаем вероятность умереть в интервале от рождения до точного возраста 15 лет и соответствующий коэффициент смертности:

$${}_{15}q_0 = 1 - 0.88305 = 0.11695$$

$${}_{15}m_0 = \frac{2 \cdot {}_{15}q_0}{15(2 - {}_{15}q_0)} = 0.00828$$

Использование гипотезы о линейности функции дожития (равномерного распределения смертей в возрастных интервалах) в данном случае приводит к не вполне удовлетворительным результатам. Чем длиннее возрастной интервал, тем слабее выражена линейность. При интервале более 5 лет использование гипотезы линейности сомнительно.

Другая формула расчета коэффициента смертности в интервале возраста от 0 до 15 лет исходит из сути коэффициентов (число смертей, отнесенное ко времени, прожитому в интервале данным поколением):

$${}_{15}m_0 = \frac{7567 + 2574 + 890 + 664}{96216 + 364584 + 447070 + 443185} = 0.00866$$
 - это лучшая оценка, так как она

основана на гипотезе линейности функции дожития на отдельных, более коротких интервалах.

3) Используя гипотезу о равномерности распределения смертей в возрастных интервалах, рассчитаем числа доживающих до точных возрастов 3 и 7 лет:

$$\text{интервал от 1 года до 5 лет: } 2574/4=644 \Rightarrow l_3=l_1-2 \cdot 644=91145$$

$$\text{интервал от 5 до 10 лет: } 890/5=178 \Rightarrow l_7=l_5-2 \cdot 178=89503.$$

Найдем вероятность дожить от точного возраста 3 года до точного возраста 7 лет:  $l_7/l_3=0.98198$ , а также вероятность умереть при переходе от точного возраста 3 года к точному возрасту 4 года:  ${}_4q_3=1 - (l_7/l_3)=0,01802$ .

В расчетах были использованы 2 упрощающие решение гипотезы:

- линейность функции дожития во всех возрастах;

- линейность функции дожития в интервале от 0 до 1 года.

В реальной жизни для ответа на вопросы 2) и 3) нужно проверить, менялась ли смертность на протяжении последних 15 лет, присутствовала ли миграция.

#### Решение Задачи 37

Представим условия задачи графически, для чего нанесем имеющиеся данные на демографическую сетку (рис. 3.4.).

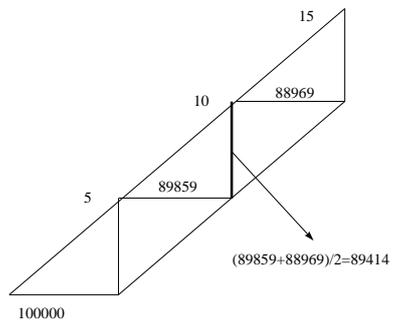


Рисунок 3.4

1) На основе фрагмента таблицы смертности, полученного в Задаче 5, рассчитаем вероятность дожить от рождения до середины возрастного интервала 5 – 10 лет:  ${}_{7,5}p_0 = 89414/100000 = 0,89414$ .

Тогда соотношение между численностью населения в возрасте 5 – 10 лет и числом родившихся можно записать следующим образом:  $N^*{}_{7,5}p_0 = 157612$ , откуда  $N = 157612/0,89414 = 176272$ . В этом случае использована ретропроекция: поиск числа родившихся в прошлом на основе данных переписи при условии сальдо миграции, близком к нулю.

Вероятность дожития от рождения до середины возрастного интервала 5 – 10 лет можно найти иначе. На основе данных о числе смертей рассчитаем соответствующую

вероятность умереть: (все смерти)/100000 =  $\frac{7567 + 2574 + \frac{1}{2} \cdot 890}{100000} = {}_{7,5}q_0$ , а затем вероятность

выжить:  ${}_{7,5}p_0 = 1 - {}_{7,5}q_0$ .

2) Оценка числа смертей в реальном населении осуществляется с использованием следующих формул:

в интервале от 0 до 1 года:  $176272 \cdot {}_1q_0 = 13339$

в интервале от 1 до 5 лет:  $162933 \cdot {}_4q_1 = 4538$

в интервале от 5 до 10 лет: 158395

Рассчитаем число доживших до точного возраста 5 лет:  $176262 - 158395 = 17877$ , а затем число родившихся  $158395 = 176262 * (1 - q_0)(1 - q_1)$ .

## РАЗДЕЛ 4. АНАЛИЗ СМЕРТНОСТИ И ЗАБОЛЕВАЕМОСТИ

### 4.1. АНАЛИЗ СМЕРТНОСТИ ПО ПРИЧИНАМ СМЕРТИ

#### 4.1.1. Классификации причин смерти

В основе статистического наблюдения за причинами смерти, заболеваемостью и деятельностью учреждений здравоохранения лежит Международная статистическая классификация болезней, травм и причин смерти (сокращенно – МКБ). Она представляет собой перечень болезней, которые сгруппированы по определенным критериям, выработанным медицинской наукой на определенном этапе ее развития, правила отбора основной причины смерти и основного заболевания в статистике причин смерти и поводов для госпитализации больных, краткие перечни для разработки данных о смертности и заболеваемости. Первая МКБ была принята международным статистическим институтом в 1893 г. С 1900 года проводятся регулярные пересмотры МКБ, в том числе с 1948 года – под эгидой Всемирной организации здравоохранения. Последняя, 10-я Международная классификация болезней была принята на сорок третьей сессии ВОЗ в 1990 году.

В МКБ\_10 выделены следующие классы болезней:

- I. инфекционные и паразитарные заболевания (коды рубрик A00-B99);
- II. новообразования (C00-D48);
- III. болезни крови, кроветворных органов и отдельные нарушения, вовлекающие иммунный механизм (D50-D89)
- IV. болезни эндокринной системы, расстройства питания и нарушения обмена веществ (E00-E99);
- V. психические расстройства и расстройства поведения (F00-F99);
- VI. болезни нервной системы (G00-G99);
- VII. болезни глаза и его придаточного аппарата (H00-H59);
- VIII. болезни уха и сосцевидного отростка (H60-H95);
- IX. болезни системы кровообращения (I00-I99);
- X. болезни органов дыхания (J00-J99);
- XI. болезни органов пищеварения (K00-K93);
- XII. болезни кожи и подкожной клетчатки (L00-L99);
- XIII. болезни костно-мышечной системы и соединительной ткани (M00-M99);
- XIV. болезни мочеполовой системы (N00-N99);
- XV. беременность, роды и послеродовой период (O00-O99);
- XVI. отдельные состояния, возникающие в перинатальном периоде (P00-P96);

- XVII. врожденные аномалии [пороки развития], деформации и хромосомные нарушения (Q00-Q99);
- XVIII. симптомы, признаки и отклонения от нормы, выявленные при клинических и лабораторных исследованиях, неклассифицированные в других рубриках (R00-R99);
- XIX. ) травмы, отравления и некоторые другие последствия воздействия внешних причин (S00-T98)
- XX. внешние причины заболеваемости и смертности (U02-Y98);
- XXI. факторы, влияющие на состояние здоровья населения и обращаемость в учреждения здравоохранения (Z00-Z99).

В МКБ не рекомендуется использовать последний XXI класс для международных сопоставлений. Его 99 рубрик выделены для тех случаев, когда в качестве диагноза указаны не болезнь, травма или внешняя причина из предыдущих 20 классов, а иные обстоятельства.

«Первопричина» смерти – основа составления классификации причин смерти. В российской системе регистрации, в соответствии с международными требованиями, в качестве главной причины смерти берется основная причина, указанная в медицинском свидетельстве наряду с непосредственной и сопутствующей причинами. Именно «основная причина» заносится в обобщающие статистические таблицы и сводные таблицы о количестве смертей по полу, возрасту и причинам смерти в определенном регионе.

#### 4.1.2. Коэффициенты смертности по причинам смерти

Общий коэффициент смертности от определенной причины рассчитывается по формуле:  $m^j = \frac{M^j}{P \cdot T}$ , где  $m^j$  – коэффициент смертности от причины  $j$ ,  $M^j$  – число умерших от данной причины  $j$  во всем населении,  $\bar{P}$  – средняя численность населения,  $T$  – период, для которого осуществляются расчеты (обычно принимается равным 1 году или 5 годам). Общие коэффициенты смертности от определенной причины обычно рассчитываются на 10 тыс. или на 100 тыс. населения. Как и общий коэффициент смертности, этот показатель находится под влиянием возрастного распределения населения.

Возрастные коэффициенты смертности от определенной причины рассчитываются по формуле:  $m_i^j = \frac{M_i^j}{P_i \cdot T} \cdot c$ , где  $m_i^j$  – коэффициент смертности от причины  $j$  в возрастной

группе  $i$  лет,  $M_i^j$  – число умерших от причины  $j$  в возрастной группе  $i$  лет,  $\bar{P}_i$  – средняя численность населения в возрасте  $i$  лет;  $T$  – временной интервал, для которой рассчитывается коэффициент;  $c$  – константа, которую чаще всего принимают равной 100000. Возрастные коэффициенты смертности по причинам смерти формируют возрастной профиль смертности от определенной причины. Рассчитав возрастные коэффициенты смертности от разных причин для одной и той же возрастной группы, можно установить относительную долю каждой причины в смертности данной возрастной группы. На основе возрастных коэффициентов смертности рассчитываются таблицы смертности по причинам смерти (см. Раздел 8).

Помимо коэффициентов смертности в целом для всего населения и отдельных возрастно-половых групп можно рассчитать и специальные коэффициенты, отражающие уровень смертности в специфических группах населения. К таким коэффициентам относится **материнская смертность** – смертность женщин в связи с беременностью, родами, осложнениями послеродового периода (в течение 6 месяцев после родов). В России коэффициент материнской смертности рассчитывается на 100 тыс. живорождений, в международных публикациях – также и на 100 тыс. женщин репродуктивного возраста. Коэффициенты материнской смертности можно рассчитывать как для всех женщин репродуктивного возраста в целом, так и для отдельных возрастных групп в пределах репродуктивного возраста.

#### 4.1.3. Стандартизованные коэффициенты смертности по причинам смерти

Эти коэффициенты рассчитываются любым из известных методов стандартизации демографических коэффициентов для устранения влияния возрастной структуры в целях корректного проведения сравнительного анализа смертности в пространстве и времени (как правило, в расчете на 100000 человек). В современной отечественной статистике стандартизованные коэффициенты смертности по причинам смерти для субъектов Российской Федерации рассчитываются прямым способом. Для расчета используется Европейский стандарт возрастной структуры (см. Раздел 2).

## 4.2. АНАЛИЗ СЕЗОННОСТИ СМЕРТНОСТИ

Распределение смертей по месяцам года в каждой стране в определенные промежутки времени сохраняется в более или менее неизменном виде. В то же время само это распределение зависит от особых климатических, социальных,

эпидемиологических характеристик данной территории на данный момент времени. Анализ сезонной вариации смертности имеет целью выделить сезонную составляющую и конъюнктурные вариации. Сезонные колебания смертности можно рассматривать применительно ко всем смертям, либо применительно к смертям в определенном возрасте, к смертям от определенной причины.

Сезонный коэффициент рассчитывается как отношение помесечных коэффициентов к среднегодовому коэффициенту. Например, для марта месяца можно рассчитать отношение числа смертей в этом месяце к числу дней месяца. Затем рассчитывается годовой коэффициент путем деления числа смертей в данном году на число дней года. Сезонный коэффициент для марта получаем делением первого числа на второе. Это ни что иное, как отклонение месячной средней от среднегодовой.

Затем, разделив наблюдаемое число смертей в марте на сезонный коэффициент, мы получим скорректированное число смертей, очищенное от влияния сезонности.

#### 4.3. ПОКАЗАТЕЛЬ МЛАДЕНЧЕСКОЙ СМЕРТНОСТИ

Показатель младенческой смертности, отражающий уровень смертности детей в возрасте от 0 до 1 года, представляет собой в общем виде отношение числа детей, умерших до года за определенный календарный период, к числу родившихся живыми в этом календарном периоде, т.е. к численности когорты в начале возрастного интервала «0 лет». Для расчета «коэффициента» младенческой смертности можно использовать несколько показателей, различающихся степенью точности вычислений. Выбор показателя зависит от доступных данных (рис. 4.1).

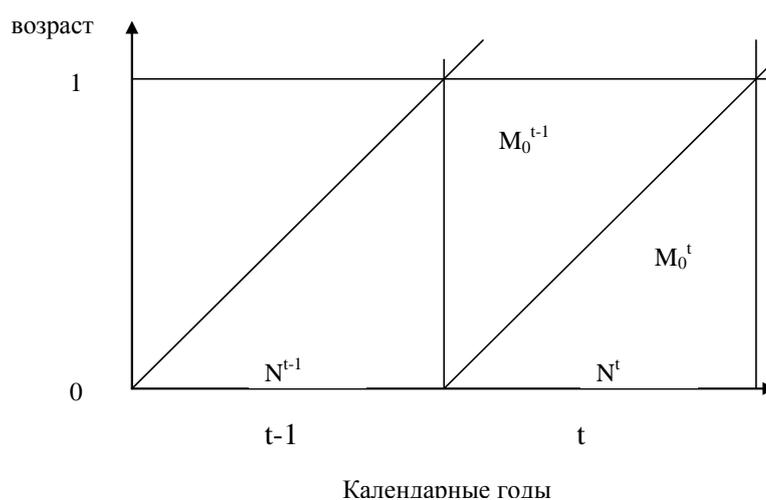


Рис. 4.1

Располагая смертями детей до одного года, классифицированными по трем временным координатам (году смерти, году рождения и возрасту), можно рассчитать наиболее точный показатель, соотнеся числа умерших из определенных поколений с численностями данных поколений при рождении:

$$m_0^t = \left( \frac{M_0^t}{N^t} + \frac{M_0^{t-1}}{N^{t-1}} \right) \cdot 1000,$$

где  $M_0^t$  и  $M_0^{t-1}$  – умершие в возрасте до 1 года из числа родившихся соответственно в году  $t$  и  $t-1$ ;  $N^t$  и  $N^{t-1}$  – численности родившихся в году  $t$  и  $t-1$ . По этой формуле рассчитывается коэффициент младенческой смертности в России.

В том случае, если смерти классифицированы только по году смерти и возрасту смерти, можно воспользоваться двумя показателями. Первый из них состоит в соотнесении чисел умерших в данном году с числами родившихся в данном году:

$$m_0^t = \frac{M_{0,t}}{N^t} \cdot 1000, \quad (1)$$

где  $M_{0,t}$  – общее число умерших в возрасте до 1 года в году  $t$ , при этом  $M_{0,t} = M_0^t + M_0^{t-1}$ .

Этот показатель плохо работает в условиях высокой младенческой смертности и высокой рождаемости, поскольку не учитывает возможных значительных изменений в числе родившихся и умерших в возрасте до 1 года в течение двух последующих лет. Однако в современных демографических условиях коэффициент младенческой смертности, вычисленный по формуле (1), широко используется для измерения уровня смертности во многих странах мира, а также в международных сопоставлениях.

В начале XX в. немецким демографом Й. Ратсом была предложена формула для расчета коэффициента младенческой смертности, которая получила его имя (формула

$$(2)): m_0^t = \frac{M_{0,t}}{k' \cdot N^t + k'' \cdot N^{t-1}} \cdot 1000, \quad (2)$$

где  $k'$  и  $k''$  – веса, которые определяются закономерностями распределения смертей по месяцам на первом году жизни. Ратс принимал эти веса равными соответственно  $2/3$  и  $1/3$ . По мере снижения уровня младенческой смертности, сопровождающегося сдвигом большей части смертей к первому месяцу жизни за счет увеличения доли смертей, обусловленных эндогенными факторами, соотношение весов меняется (табл. 4.1). Таким образом, в условиях низкой младенческой смертности формула Ратса переходит в формулу (1).

Таблица 4.1. Соотношение весов в формуле Ратса и уровня младенческой смертности

Уровень младенческой смертности, $m_0$ (‰)	Веса (%)	
	$K'$	$K''$
200	60	40
150	67	33
100	75	25
50	80	20
25	85	15
15	95	5

Источник: M. Termot, G. Wunsch *Introduction to Demographic Analysis*, p. 84

Величина коэффициента младенческой смертности зависит от принципов определения понятий «живорождение» и «мертвоорождение». С 1 января 1993 г. в России применяется понятие живорождения, предложенное ВОЗ: «Полное изгнание или извлечение продукта зачатия из организма матери вне зависимости от продолжительности беременности, при этом плод дышит или проявляет другие признаки жизни: сердцебиение, пульсация пуповины, произвольные движения мускулатуры. Каждый продукт такого рождения рассматривается как живорожденный».

Помимо общего коэффициента младенческой смертности, рассчитываются частные коэффициенты:

**коэффициент мертвоорождаемости** – отношение числа мертвоорожденных в данном году к числу родившихся живыми и мертвоорожденными в этом году;

**коэффициент неонатальной смертности** – отношение численности детей, умерших в течение первых 28 дней жизни, к числу родившихся живыми;

**коэффициент ранней неонатальной смертности** – отношение числа умерших на первой неделе жизни (в возрасте 0 – 7 дней) в данном году к числу родившихся живыми;

**коэффициент поздней неонатальной смертности** – отношение числа умерших в период после 7 и до 28 полных дней жизни в данном году к числу родившихся живыми

**коэффициент перинатальной смертности**<sup>46</sup> – отношение числа мертвоорожденных и умерших в течение первых 7 суток жизни к общему числу родившихся живыми и мертвоорожденными;

<sup>46</sup> По рекомендации ВОЗ перинатальный период начинается от 22 недель беременности и заканчивается через 7 полных дней после рождения. В России принято иное определение перинатального периода: от 28 недель беременности до 7 полных дней после рождения. Поэтому при международных сравнениях этого показателя необходимо уточнять, по какой методике он рассчитан.

**коэффициент постнеонатальной смертности** – отношение числа детей, умерших в период от 28 дней и до достижения точного возраста 1 год.

Коэффициент младенческой смертности рассчитывается также по классам причин смерти как доля умерших от определенной причины, умноженная на общий коэффициент младенческой смертности.

#### 4.4. БИОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЛАДЕНЧЕСКОЙ СМЕРТНОСТИ

Биометрический метод исследования младенческой смертности был впервые предложен в 1951 году французским демографом Ж. Буржуа-Пиша<sup>47</sup>. Этот показатель предназначен для определения соотношения эндогенных, т.е. связанных с наследственными заболеваниями, особенностями строения организма ребенка и др., и экзогенных, т.е. связанных с внешним воздействием на организм, причин среди всех смертных случаев детей до 1 года. Достоинство метода состоит в том, что он не требует наличия данных о распределении смертей по отдельным причинам или по группам причин. Для его применения достаточно простого распределения смертей по точному возрасту умерших в месяцах. Суть модели заключается в предпосылке относительно распределения смертных случаев по месяцам первого года жизни. Если экзогенная смертность является исключительно функцией возраста, то эндогенные смерти после первого месяца жизни практически не встречаются. Согласно эмпирической модели, обоснованной Буржуа-Пиша, общее число умерших к возрасту  $x$  дней из начальной совокупности родившихся определяется уравнением:

$$D_x = a + b \cdot \ln^3(x+1),$$

где  $x$  – возраст смерти в днях (месяцах),  $D_x$  – количество смертей к возрасту  $x$  дней,  $a$  – параметр, характеризующий эндогенную смертность,  $b$  – параметр, характеризующий экзогенную смертность. Для возраста 1 год параметр  $a$  означает число умерших к возрасту 1 год от эндогенных причин,  $b \cdot \ln^3 366$  – число умерших от экзогенных причин. На практике в целях проведения сравнительного анализа между странами или разными временными периодами исходную совокупность родившихся принимают равной 1000 или другому числу, кратному 10. В этом случае  $a$  и  $b \cdot \ln^3 366$  означают вероятности умереть соответственно от эндогенных (коэффициент эндогенной младенческой смертности) и экзогенных (коэффициент экзогенной младенческой смертности) причин на первом году жизни, а сумма параметром будет равна коэффициенту младенческой смертности.

<sup>47</sup> Jean Bourgeois-Pichat. La Mesure de la Mortalité Infantile // Population 51-6-2, 1951.

Как правило, значения параметров  $a$  и  $b$  находятся с помощью метода наименьших квадратов.

#### 4.5. МОДЕЛИ СМЕРТНОСТИ

##### 4.5.1. «Законы» смертности

Первые демографические модели представляли собой математические функции, отражающие зависимость между возрастом и интенсивностью смертности в данном возрасте, которые получили название «законы» смертности.

Одним из наиболее известных «законов» смертности является формула, названная в честь ее авторов «законом Гомперца-Мейкема»:

$$u(x) = A + R \cdot \exp(a \cdot x), \quad (1)$$

где  $u(x)$  – интенсивность смертности,  $x$  – возраст,  $R$  и  $a$  – параметры Гомперца,  $A$  – параметр Мейкема.

В демографии формула Гомперца-Мейкема часто используется в преобразованном виде:

$$\ln p(x) = A + B \cdot c^x \quad (2)$$

Параметры модели  $A$ ,  $B$  и  $c$  можно оценить, зная значения вероятностей дожития до начала следующего возрастного интервала  $p(x)$  таблиц смертности для трех равноотстоящих возрастов.

Пусть имеются значения  $p(x)$  для трех равноотстоящих возрастов, которые условно обозначим  $-2$ ,  $-1$  и  $0$ . Тогда можно записать:

$$\ln p(-2) = a + b \cdot c^{-2},$$

$$\ln p(-1) = a + b \cdot c^{-1},$$

$$\ln p(0) = a + b.$$

Последовательно вычитая из предшествующего выражения последующее, получаем:

$$\Delta \ln p(-2) = b \cdot c^{-2}(c-1), \quad \Delta \ln p(-1) = b \cdot c^{-1}(c-1).$$

Из найденных выражений легко найти формулы для оценки значений параметров функции Гомперца-Мейкема:

$$C = \Delta \ln p(-1) / \Delta \ln p(-2),$$

$$B = C / (c-1) \cdot \Delta \ln p(-1),$$

$$A = \ln p(0) - b.$$

Для получения более точных оценок параметров модели (1) используются методы математической статистики.

Закон Гомперца-Мейкема достаточно точно описывает изменение интенсивности смертности в возрастах старше 30 лет. Но он не действует в молодых и в предельно старых возрастах. Формула Гомперца-Мейкема применяется для выравнивания, интерполяции и экстраполяции показателей таблицы смертности в возрастах, где в силу малой численности живущих и умерших прямой расчет показателей невозможен.

Другая область применения закона Гомперца-Мейкема связана с объяснением возрастных закономерностей смертности. На основе статистического анализа параметров модели было установлено, что эпидемиологический переход сопровождался заметными изменениями параметра  $A$ . По мнению ряда специалистов, этот параметр отражает воздействие условий среды на смертность. Параметры  $R$  и  $a$ , определяющие возрастную компоненту смертности, являются исторически стабильными и определяются биологическими особенностями популяций человека.<sup>48</sup>

С целью более точной аппроксимации интенсивности смертности было предпринято несколько модификаций закона Гомперца-Мейкема. Одна из них – уравнение Перкса – основана на использовании логистических функций:

$$u(x) = \frac{A + B \cdot \exp(b \cdot x)}{1 + D \cdot \exp(b \cdot x)}$$

Это уравнение является частным случаем формулы лавинообразного разрушения организма при старении. Из теории надежности была заимствована модель Вейбулла, описывающая вариабельность по срокам жизни технических систем:  $u(x) = A + B \cdot x^c$ .

Наиболее известной формулой, которая описывает смертность во всех возрастах, является уравнение Хеллигмена-Полларда:

$$\frac{q_x}{1 - q_x} = A^{(x+B)^C} + D \cdot \exp(-E \cdot [\ln x - \ln F]^2) + G \cdot H^x.$$

Для оценки каждого из 8-ми параметров модели используются математико-статистические методы, которые реализованы в ряде демографических программ. Каждое из трех слагаемых уравнения описывает один из участков возрастной кривой смертности. Первое слагаемое уравнения описывает падение смертности с момента рождения до возраста минимальной смертности. Параметр  $A$  измеряет уровень младенческой смертности,  $B$  – указывает ее локализацию на участке кривой,  $C$  –

<sup>48</sup> Гаврилов Л.А., Гаврилова Н.С. Биология продолжительности жизни. М., 1991.

указывает на темп уменьшения младенческой смертности с возрастом. Второе слагаемое уравнения отражает ускоренный рост уровня смертности, прежде всего из-за несчастных случаев («выпуклость несчастных случаев» в кривой смертности) между 15 и 30 годами, который ярко проявляется в мужском населении. Для описания смертности в старших возрастах в модель в качестве последнего слагаемого авторами модели было введено уравнение Гомперца с параметрами  $G$  и  $H$ .

#### 4.5.2. Модельные (типовые) таблицы смертности

Неудовлетворенность результатами поиска «законов» смертности, накопление огромного массива эмпирических данных и потребности практики в демографической информации стимулировали развитие другого подхода к моделированию смертности – построение модельных (типовых) таблиц смертности.

Модельные таблицы смертности представляют собой систему таблиц, каждая из которых отражает изменение интенсивности смертности для населений со сходным порядком вымирания. Как правило, они строятся для каждого пола и ранжируются по величине продолжительности жизни. В таком виде модельные таблицы отражают эволюцию порядка вымирания (табл. 4.2). Их практическая значимость определяется тем, что они хорошо коррелируют с возрастными показателями смертности многих реальных населений.

Таблица 4.2. Вероятности умереть семейства модельных таблиц «Запад», мужчины.

возраст	40	45	50	55	60	65	70	75	80
0	0,1871	0,1527	0,1225	0,0946	0,0694	0,0467	0,0262	0,0111	0,0025
1	0,1047	0,0817	0,0586	0,0402	0,0248	0,0117	0,0047	0,0012	0,0001
5	0,0288	0,0231	0,0177	0,0131	0,0091	0,0055	0,0028	0,0010	0,0002
10	0,0209	0,0168	0,0130	0,0098	0,0069	0,0043	0,0024	0,0009	0,0002
15	0,0292	0,0239	0,0193	0,0151	0,0112	0,0076	0,0045	0,0020	0,0005
20	0,0414	0,0339	0,0275	0,0213	0,0158	0,0108	0,0062	0,0027	0,0006
25	0,0458	0,0372	0,0299	0,0230	0,0167	0,0110	0,0062	0,0026	0,0006
30	0,0526	0,0427	0,0342	0,0262	0,0189	0,0124	0,0070	0,0029	0,0006
35	0,0620	0,0506	0,0410	0,0317	0,0233	0,0157	0,0091	0,0039	0,0009
40	0,0758	0,0625	0,0512	0,0407	0,0309	0,0219	0,0138	0,0066	0,0018
45	0,0910	0,0766	0,0647	0,0536	0,0430	0,0330	0,0228	0,0127	0,0046
50	0,1178	0,1010	0,0872	0,0744	0,0620	0,0502	0,0372	0,0231	0,0101
55	0,1496	0,1317	0,1172	0,1037	0,0903	0,0773	0,0614	0,0427	0,0227
60	0,2049	0,1831	0,1657	0,1495	0,1331	0,1170	0,0965	0,0712	0,0419
65	0,2746	0,2501	0,2307	0,2125	0,1940	0,1756	0,1508	0,1186	0,0780
70	0,3732	0,3459	0,3247	0,3044	0,2836	0,2628	0,2334	0,1936	0,1397
75	0,5057	0,4756	0,4525	0,4304	0,4075	0,3844	0,3509	0,3037	0,2363

Первое семейство типовых таблиц смертности, состоящее из 40 таблиц, упорядоченных по возрастанию ожидаемой продолжительности жизни от 18 до 75 лет, было построено в отделе народонаселения ООН в начале 1950-х гг.<sup>49</sup>. Модельные таблицы смертности ООН являются однопараметрическими. Они были построены на основе гипотезы о том, что величина  ${}_5q(x)$  является квадратичной функцией от вероятности умереть  ${}_5q(x-5)$  в предшествующем возрастном интервале (за исключением первых возрастных групп (0,1) и (1,5), все остальные возрастные группы являются пятилетними). Если мы знаем один параметр смертности, например, младенческую смертность, то по нему можно восстановить всю таблицу смертности. Оценка коэффициентов квадратичной параболы для каждого значения  ${}_5q(x)$  была получена на основе регрессионных уравнений, построенных на основе 158 эмпирических таблиц смертности для каждого пола из развитых стран мира. В отличие от всех других вероятностей вероятность умереть в младенческом возрасте принималась за независимую переменную. При построении таблиц она определялась произвольно.

Модельные таблицы смертности ООН обладают определенными недостатками. В частности, их сопоставление с фактическими данными по отдельным странам показывает систематическое расхождение в кривых вероятностей умереть. В дальнейшем, при сохранении метода построения, они усовершенствовались. Сегодня модельные таблицы смертности ООН по-прежнему остаются в исследовательском арсенале демографов.

В 1966 г. американские демографы Коул и Демени создали систему региональных модельных таблиц смертности.<sup>50</sup> На основе статистического исследования 326 таблиц смертности развитых стран было отобрано 192 «надежных» таблиц, из которых в ходе дальнейшего анализа было выделено четыре региональных типа смертности: «Восток» (данные Германии, северной и центральной Италии, Австрии, Чехии и Польши), «Север» (данные скандинавских стран), «Юг» (данные Испании, Португалии, Южной Италии), «Запад» (данные остальных стран Европы, Северной Америки, Японии, Израиля, Австралии и Новой Зеландии). Семейство «Запад» рекомендуется выбирать в качестве модельной таблицы в тех случаях, когда отсутствуют данные о смертности.

Для каждого регионального семейства были построены линейные уравнения, связывающие вероятности умереть  ${}_nq_x$  с одним параметром – продолжительности

<sup>49</sup> United Nations, *Age and Sex Patterns of Mortality: Model life table for Underdeveloped Countries*. New-York: United Nations.

<sup>50</sup> Coale A., Demeny P., *Regional Life Tables and Stable Populations*. Princeton: Princeton University Press. 1966.

предстоящей жизни для возраста 10 лет  $e_{10}$ . Каждое из региональных семейств «Восток», «Север», «Юг» и «Запад» состоит из 24 таблиц, каждая из которых задается уровнями продолжительности жизни в возрасте 10 лет, которым соответствовали значения  $E(0)$  от 20 до 77,5 лет с шагом в 2,5 года. Соотношения между этими семействами относительно семейства таблиц «Запад» представлено на рис. 4.1, где в качестве меры используется

функция  $\phi(x) = \frac{{}_nq_x^w}{{}_nq_x}$ , в которой индекс  $w$  указывает на модель «Запад».

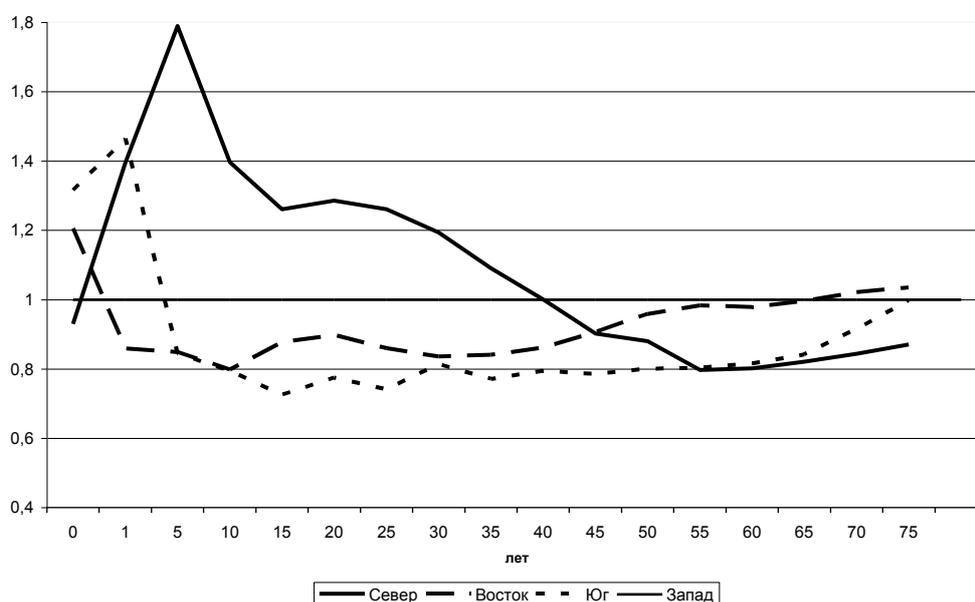


Рис. 4.1. Отклонение  ${}_nq_x$  модельных таблиц «Север», «Восток», «Юг» от  ${}_nq_x$  таблиц «Запад». Мужское население.  $E_0=60$  лет

В 1982 г. к этим таблицам были добавлены таблицы, полученные аналогичным методом для развивающихся стран: «Латинская Америка», «Чили», «Южная Азия», «Дальний Восток» и «Общая»<sup>51</sup>. Каждый показатель из последней таблицы представляет собой среднюю арифметическую величину из соответствующих параметров всех предыдущих таблиц.

Модельные таблицы смертности используются в демографии, во-первых, для оценки уровня смертности и продолжительности жизни населения в случае неполных или недостоверных данных. Для этого наиболее надежные из имеющихся эмпирических данных сравниваются с модельными таблицами, и из последних выбирают наиболее

<sup>51</sup> United nations, Model Life Tables for Developing Countries. New-York: United Nations, 1982.

подходящую<sup>52</sup>. Во-вторых, модельные таблицы смертности используются в анализе смертности. В частности, сравнивая их с реальными данными, можно проверить качество статистики смертности или выявить особенности смертности в той или иной стране. В-третьих, модельные таблицы смертности применяются при разработке демографического прогноза для получения возрастных характеристик смертности. Для этого, проведя анализ смертности, следует определить, какое семейство модельных таблиц лучше всего подходит конкретному населению, для которого выполняется прогноз. Затем прогнозируется ожидаемая продолжительность предстоящей жизни с рождения. Для каждого полученного значения продолжительности жизни из семейства таблиц берется соответствующая ему таблица, задающая возрастные характеристики смертности. В то же время следует иметь в виду, что отклонения эмпирических данных от модельных таблиц могут быть значительными. Главный недостаток модельных таблиц заключается в том, что они привязаны к статистическим данным определенного круга стран и не исчерпывают всего разнообразия возрастных распределений смертности в населении Земного шара.

#### 4.5.3. Реляционные модели

Реляционные модели возрастного распределения смертности сочетают в себе идеологию как математического подхода, так и модельных таблиц. Английский демограф Уильям Брасс предложил моделировать кривую смертности одного населения на основе таблицы смертности другого: или теоретического, или реального населения с надежными данными. Для этого используется логит-преобразование, посредством которого устанавливается линейная зависимость между числами доживающих из двух таблиц смертности:

$$\Lambda(I^*(x)) = \alpha + \beta \cdot \Lambda(I(x))$$

где:

$I(x)$  – число доживающих до возраста  $x$  в населении, принятом за стандарт;

$I^*(x)$  – число доживающих до возраста  $x$  в реальном населении;

$\alpha$  и  $\beta$  – константы,

$\Lambda$  – логит-преобразование, которое задается выражением:

$$\Lambda(I(x)) = \log \frac{1-I(x)}{I(x)} = 0,5 \ln \left( \frac{1-I(x)}{I(x)} \right).$$

<sup>52</sup> Выбор оптимальной модельной таблицы смертности для реального населения современные демографы осуществляют с помощью компьютерных программ (прежде всего Mortpak).

В каноническом виде логит-преобразование выглядит следующим образом:

$$\log \hat{it}(p) = 0.5 \ln \left\{ \frac{p}{1-p} \right\}, \text{ где } p \text{ – вероятность наступления события.}$$

Таким образом, через одно распределение чисел доживающих  $l(x)$  – стандарт – можно выразить множество других  $l^*(x)$  при определенных коэффициентах  $\alpha$  и  $\beta$ . Если нам задана стандартная таблица смертности, а также параметры таблиц смертности разных населений в отдельных возрастах, то, вычислив константы  $\alpha$  и  $\beta$ , мы можем получить неизвестные параметры таблиц смертности. Уильям Брасс, исследуя смертность в Африке, использовал так называемый африканский стандарт смертности. Кроме того, он использовал для построения реляционных моделей также общий стандарт смертности. Отличие между ним и африканским стандартом заключается в уровне детской смертности (см. таблицу 4.3). Как уже говорилось, в качестве стандарта можно использовать возрастные распределения смертности теоретического (например, модельные таблицы Коула-Демени) или реального населения с надежными данными (например, Швеции). Отметим, что реляционная модель Брасса генерирует любое семейство таблиц Коула-Демени из одной таблицы смертности этого семейства. Подобное свойство используется для реализации модельных таблиц смертности в компьютерных программах.

Таблица 4.3. Общий и африканский стандарты смертности

возраст	Африканский стандарт		Общий стандарт	
	$l(x)$	$\text{Logit}(1-l(x))$	$l(x)$	$\text{Logit}(1-l(x))$
0	1		1	
1	0,8499	-0,8669	0,8802	-0,9972
2	0,807	-0,7153	0,8335	-0,8053
3	0,7876	-0,6553	0,8101	-0,7253
4	0,7762	-0,6218	0,7964	-0,6820
5	0,7691	-0,6016	0,7863	-0,6514
10	0,7502	-0,5498	0,7502	-0,5498
15	0,7362	-0,5132	0,7362	-0,5132
20	0,713	-0,4550	0,713	-0,4550
25	0,6826	-0,3829	0,6826	-0,3829
30	0,6525	-0,3150	0,6525	-0,3150
35	0,6223	-0,2497	0,6223	-0,2497
40	0,5898	-0,1816	0,5898	-0,1816
45	0,5535	-0,1074	0,5535	-0,1074
50	0,5106	-0,0212	0,5106	-0,0212
55	0,4585	0,0832	0,4585	0,0832
60	0,3965	0,2100	0,3965	0,2100
65	0,321	0,3746	0,321	0,3746
70	0,238	0,5818	0,238	0,5818
75	0,1516	0,8611	0,1516	0,8611

80	0,0768	1,2433	0,0768	1,2433
85	0,0276	1,7810	0,0276	1,7810
90	0,0059	2,5634	0,0059	2,5634
95	0,0006	3,7090	0,0006	3,7090
100	0		0	

Если у исследователя имеется ряд значений функций дожития  $l(x)$  реального населения, то, учитывая линейный характер логит-преобразования, для оценки коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  можно использовать метод наименьших квадратов. Если  $\alpha$  и  $\beta$  известны, то и их помощью можно вычислить любые неизвестные  $l(x)$  или  $p(x)$ . Если для реализации метода наименьших квадратов данных недостаточно, например, имеются только два надежных значения функции  $p(x)$ , то в этом случае для оценки  $\alpha$  и  $\beta$  можно решить простую систему линейных уравнений.

*Пример 1<sup>53</sup>*

*Дано: Во многих развивающихся странах текущий учет естественного движения отсутствует или плохо налажен. Поэтому данные о смертности для оценки ее уровня получают на основе материалов переписей. Для этого в программу переписи включаются разные вопросы, например: «жива ли Ваша мать (отец)?», «сколько детей у Вас родилось и сколько из них живы?». С помощью этих вопросов по данным переписи населения в Свазиленде были получены надежные оценки функции дожития женщин в следующих детских и взрослых возрастах:*

$l(x)$	$l(x)$	Logit $l(x)$	African standard	Logit $l^{95}(x)$
2	0,8102	-0.7257	0,8335	-0.8052
3	0,0806	-0.7121	0,8101	-0.7252
5	0,7885	-0.658	0,7863	-0.6515
...	...	...	...	...
45	0,6843	-0.3868	0,5534	-0.1073
50	0,6484	-0.3060	0,5106	-0.0212
55	0,5952	-0.1928	0,459	-0.0832
60	0,5363	-0.0727	0,3965	0.2100
65	0,4773	0.0454	0,3221	0.3746

*Задача: найти коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  в модели Брасса.*

*Решение. Используя имеющиеся данные, найдем оценки логитов в двух точках. Для устойчивости результата вычислим среднее значение логитов для детских возрастов (точка c) и для старших возрастов (точка a).*

$$\text{Logit } l(c) = ((-0.725) + (-0.721) + (-0.6580)) / 3 = -0.6986$$

<sup>53</sup> См. Newell C., Methods and models in demography. N.Y. 1988. p.159-162

$$\text{Logit } I^{as}(x) = (-0.8052) + (-0.7252) + (-0.6515) / 3 = -0.7273$$

Аналогичным приемом определяем координаты точки  $a$ :

$$(\text{Logit } I(a), \text{Logit } I^{as}(a)) = (0, 1079, -0, 1826)$$

Коэффициент  $\beta$  вычисляется по формуле:  $\beta = \frac{y_a - y_c}{x_a - x_c} = \frac{(-0.1826) - (-0.6986)}{0.1079 - (-0.7273)}$ , откуда

$$\beta = 0,6178$$

Оценка  $\alpha$  получается из формулы  $\alpha = \log \text{itl}^*(x) - \beta \cdot \log \text{itl}^{as}(x)$

$$\alpha = -0,2493$$

Ответ:  $\alpha = -0,2493$ ,  $\beta = 0,6178$

Задание: с помощью преобразования Брасса получите краткую таблицу смертности населения Свазиленда.

#### 4.6. АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ И ДИНАМИКИ ЗАБОЛЕВАЕМОСТИ

##### 4.6.1. Абсолютные и относительные показатели заболеваемости и инвалидности

При анализе заболеваемости также используется Международная классификация болезней, как и при анализе смертности. При этом рассчитываются следующие абсолютные показатели (для населения в целом и по возрастно-половым группам):

- числа больных с диагнозом, установленным впервые в жизни (в данном году);
- числа зарегистрированных больных определенной болезнью;
- числа лиц, впервые признанных инвалидами (по группам болезней, категориям инвалидности);
- числа инвалидов.

На основе абсолютных показателей и данных о возрастно-половой структуре населения, можно рассчитать относительные показатели (коэффициенты). Наиболее часто используются:

*Коэффициент заболеваемости (incidence rate)* – отношение числа впервые зарегистрированных больных к средней численности населения в данном году. Показывает среднее число новых случаев заболевания на 1000, 10000 или 100000 человек.

*Коэффициент распространенности заболевания (prevalence rate)* – отношение числа больных с определенным диагнозом независимо от даты установления диагноза к средней численности населения в данном году. Показывает среднее число больных в населении на 1000, 10000 или 100000 человек.

Оба показателя можно рассчитать как для населения в целом, так и для отдельных возрастно-половых и социальных групп. Первый показатель будет отражать динамику заболеваемости (инвалидности) от года к году, второй – долю больных (инвалидов) в населении или структуру заболеваемости (инвалидности).

На основе данных о заболевших и выздоровевших можно рассчитать коэффициент летальности заболевания как отношение числа умерших от данной причины к числу заболевших.

#### 4.6.2. Таблицы заболеваемости

Таблицы заболеваемости представляют собой ряды упорядоченных величин, характеризующих изменение заболеваемости в зависимости от возраста. Таблицы заболеваемости бывают следующих видов:

- интегральные таблицы;
- таблицы заболеваемости отдельными хроническими заболеваниями;
- таблицы заболеваемости острыми заболеваниями.

*Интегральные таблицы* строятся на основании сведений о новых зарегистрированных заболеваниях и хронических заболеваниях. Число заболевших ( $Z_x$ ) в период от  $x$  до  $x+1$  равно сумме числа впервые обратившихся с данным заболеванием ( $A_x$ ) и уменьшения/увеличения за этот период числа заболеваний, впервые выявленных при медосмотре ( $B_{x+1}-B_x$ ). Для однолетних возрастных интервалов  $Z_x = A_x + (B_{x+1} - B_x)$ , для пятилетних  $Z_x = (5A_x + B_x) - B_{x-5}$ .

Показатели интегральных таблиц заболеваемости:

$K_x$  – среднее число заболеваний  $j$ -й болезнью, впервые обнаруженных в возрасте от  $x$  до  $x+5$  (по данным обращения за медицинской помощью, на 1000 человек данного возраста)

$B_x$  – число заболеваний  $j$ -й болезнью, впервые обнаруженных в возрасте от  $x$  до  $x+5$  (по данным мед. осмотров)

$C_x$  – среднее число заболеваний  $j$ -й болезнью, впервые зафиксированных в возрасте от  $x$  до  $x+5$  (по данным мед. осмотров на 1000 лиц в данном возрасте)

$D_x$  – среднее число заболеваний  $j$ -й болезнью, впервые выявленных в возрастном интервале от  $x$  до  $x+5$  (по данным обращения за мед. помощью, на 1000 лиц в возрасте от  $x$  до  $x+5$ );  $D_x = 5K_x$

$Z_x$  – среднее число заболеваний, впервые выявленных в интервале возраста от  $x$  до  $x+5$  (по данным обращения за мед. помощью и мед. осмотров, ан 1000 лиц в возрасте от  $x$  до  $x+5$ );  $Z_x = C_x + D_x$

$S_x$  – среднее число заболеваний, впервые обнаруженных в возрасте от 15 до  $x$  лет (без учета смертности, на 1000 лиц в возрасте от  $x$  до  $x+5$ )

$Y_x$  – среднее число заболеваний, впервые зафиксированных в возрастном интервале от  $x$  до  $x+5$  лет (с учетом смертности, на 1000 лиц в возрасте от  $x$  до  $x+5$ )

$W_x$  – среднее число заболеваний, впервые выявленных в возрасте от 15 до  $x$  лет (с учетом смертности, на 1000 человек в возрасте от 15 до  $x$  лет).

Показатели  $S_x$  и  $W_x$  дают сводную характеристику заболеваемости, это данные о среднем числе заболеваний, перенесенных одним человеком в течение жизни (с учетом и без учета сложившегося режима смертности) – брутто и нетто-коэффициенты заболеваемости.

*Таблицы заболеваемости отдельными хроническими заболеваниями* строятся на основе данных о случаях заболеваний и о численности населения в отдельных возрастно-половых группах. Вычисляются коэффициенты заболеваемости, вероятность заболеть, числа заболевших и незаболевших, средний период жизни при отсутствии хронического заболевания.

*Таблицы заболеваемости острыми заболеваниями* строятся на основе повозрастных коэффициентов заболеваемости и данных о численности стационарного населения из таблиц смертности. Произведение возрастного коэффициента заболеваемости и численности стационарного населения дает среднее число заболеваний в течение периода. Брутто-коэффициент заболеваемости от 15 лет до возраста  $x$ :  $5 \sum_{15}^x K_x$ , нетто-коэффициент заболеваемости от 15 лет до возраста  $x$ :  $\sum_{15}^x K_x L_x$ .

#### 4.6.3. Таблицы инвалидизации

Таблицы инвалидизации представляют собой упорядоченный ряд величин, характеризующих увеличение числа инвалидов с возрастом. Рассчитываются для всей первичной инвалидности, а также по отдельным группам инвалидности и заболеваниям. В таблице инвалидизации присутствуют следующие показатели:

$m_x$  – коэффициенты инвалидизации;

$a_x$  – вероятность стать инвалидом;

$p_x$  – вероятность сохранить трудоспособность;

$l_x$  – число трудоспособных;

$d_x$  – число инвалидов;

$L_x$  – стационарное число трудоспособных;

$T_x$  – число человеко-лет трудоспособности.

#### 4.6.4. Измерение уровня здоровья

Уровень здоровья измеряется с помощью системы показателей, ядро которых составляют:

- ожидаемая продолжительность предстоящей жизни;
- стандартизированные коэффициенты смертности по причинам смерти;
- коэффициенты младенческой смертности (в т.ч. по причинам);
- материнская смертность, материнская заболеваемость;
- инвалидность;
- временная нетрудоспособность;
- госпитализация.

### ЗАДАЧИ

#### Задача 1

На основе данных о числе умерших от некоторых причин и численности населения России (Таблица 2 Приложения 1) рассчитайте общие коэффициенты смертности от основных групп причин в 1990-е гг. и прокомментируйте их динамику.

Умершие по основным классам причин смерти. Все население. (тыс.)

Причины смерти	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Все причины	1656	1691	1807	2129	2301	2204	2082	2016	1989	2144	2225
Болезни системы кровообращения	915	921	961	1132	1230	1164	1114	1100	1094	1188	1231
Несчастные случаи, отравления и травмы	198	211	257	336	368	349	307	275	274	3001	3187
Новообразования	288	294	300	305	306	299	294	296	296	299	298
Болезни органов дыхания	88	83	86	107	119	109	99	93	84	94	102
Болезни органов пищеварения	43	43	49	56	65	68	62	57	56	61	65
Инфекцион-	18	18	19	25	29	30	31	30	28	36	36



*Задача 4*

На основе возрастных коэффициентов заболеваемости мужчин и женщин (на 1000) и чисел живущих стационарного населения в 2000 году, приведенных в Таблицах 1.3.1. и 1.3.2. Приложения 1, рассчитайте нетто- и брутто коэффициенты заболеваемости острыми респираторными заболеваниями в трудоспособном возрасте.

Возрастные группы	Мужчины	Женщины
15 – 19	77,7	120,3
20 – 24	184,5	229,1
25 – 29	178,4	238,6
30 – 34	249,9	265,1
35 – 39	262,6	275,9
40 – 44	242,4	276,5
45 – 49	217,6	253,4
50 – 54	188,4	206,5
55 – 59	174,1	155,5

*Задача 5. Заболеваемость населения России активным туберкулезом*

На основе возрастных коэффициентов заболеваемости мужчин и женщин активным туберкулезом (на 100 тыс.) в 2000 году и чисел живущих стационарного населения в 2000 году, приведенных в Таблицах 1.3.1. и 1.3.2. Приложения 1, рассчитайте нетто- и брутто коэффициенты заболеваемости активным туберкулезом в трудоспособном возрасте и на протяжении всей жизни.

Возрастные группы	Мужчины	Женщины
0 – 14	17,6	18,0
15 – 17	39,3	31,8
18 – 34	213,3	71,1
35 – 54	209,4	46,6
55 – 64	140,9	27,2
65 лет и старше	81,3	22,6

*Задача 6*

На основе данных о коэффициентах инвалидности (на 10 000 детей данного возраста) рассчитайте таблицу детской инвалидности в 1997 г. в России.

Возрастные группы	Коэффициент инвалидности
0 – 4 года	105,0
5 – 9 лет	164,2
10 – 14 лет	189,5
15 лет	173,9

*Источник: Инвалиды в России: причины и динамика инвалидности, противоречия и перспективы социальной политики /Малева Т.М., Васин С.А., Голодец О.Ю., Бесфамильная С.В.; Бюро экон. анализа. – М., 1999. – с. 127*

*Задача 7. Биометрический анализ младенческой смертности*

В 1938 году в Москве было зарегистрировано 114375 рождений. На основе данных о ежемесячном распределении смертей в этом поколении родившихся:

- постройте таблицу смертности на первом году жизни;
- используя биометрический метод анализа младенческой смертности по причинам, оцените вклад эндогенных и экзогенных причин в коэффициент младенческой смертности.

Возраст смерти (исполнившихся месяцев)	Число умерших
0	5429
1	966
2	952
3	1153
4	1262
5	1158
6	1228
7	1211
8	1139
9	1146
10	953
11	944

*Задача 8. Анализ сезонности общей смертности в Москве*

На основе данных о ежемесячном распределении смертей в Москве (оба пола) сделайте выводы о влиянии сезонности на динамику смертности. Какие факторы определяли наличие сезонной составляющей смертности в разные исторические периоды? Для этого рассчитайте индексы сезонности и нанесите их на графики.

Числа умерших по месяцам:

месяцы	годы						
	1927	1941	1957	1967	1977	1987	1997
январь	2509	4705	3248	6077	8199	9789	12636
февраль	2299	3953	2887	4961	7108	8293	10108
март	2589	4380	3306	5026	6923	9039	10534
апрель	2570	4034	3200	4850	7156	8797	10078
май	2354	4010	3201	5087	7161	8772	9917
июнь	2005	3642	3075	4806	7045	8779	9889
июль	2465	4381	3139	4705	6929	8453	9967

август	2349	3790	2825	4546	6940	8211	9930
сентябрь	2333	3187	2949	4614	6990	8502	10017
октябрь	2194	4033	3990	5062	7281	8425	10496
ноябрь	2087	3701	3310	4968	6935	8704	10124
декабрь	2455	3803	3476	5517	7654	9262	10949
итого	28209	47619	38606	60219	86321	105026	124645

Числа родившихся по месяцам:

месяцы	годы						
	1927	1941	1957	1967	1977	1987	1997
январь	5488	8781	5587	6018	8020	10442	6900
февраль	4871	7882	5405	5906	7524	9618	5402
март	5012	8760	6393	6084	8952	10824	5625
апрель	4743	8541	6209	5970	8561	10864	5552
май	4535	8905	6515	6441	8487	11568	5748
июнь	4418	9572	6176	6522	9208	11484	5941
июль	4704	9717	5356	6456	8903	11139	6234
август	4683	5045	5975	6275	9101	10245	5712
сентябрь	4884	4429	5487	5924	8496	9795	5320
октябрь	5111	4604	5631	6028	8230	9907	5244
ноябрь	4817	3778	5501	5515	8427	9740	4885
декабрь	5026	3940	5643	5913	8502	9783	4897
итого	5829	8395	6987	7305	102411	125409	6811
	2	4	8	2			0

#### Задача 9. Анализ смертности мужчин и женщин

Используя данные о возрастной структуре населения Москвы в 1939 году (Задача 14 Раздела 1) и данные об умерших в 1939 г., представленные в таблице, проанализируйте соотношение возрастных коэффициентов смертности мужчин и женщин в различных возрастах. Какие социально-экономические и демографические факторы повлияли на это соотношение?

возраст	умершие	
	мужчины	женщины
0	9731	7837
1	3158	2881
2	725	611
3	232	221
4	119	102
5	87	88
6	86	81
7	90	67
8	84	68

9	86	56
10	52	41
11	73	55
12	82	58
13	69	67
14	78	51
15	77	67
16	105	73
17	109	92
18	147	89
19	130	79
20	149	113

21	132	92
22	146	99
23	156	134
24	225	166
25	265	144
26	221	176
27	252	154
28	273	176
29	220	162
30	321	223
31	226	107
32	295	187
33	278	129
34	262	159
35	340	207
36	248	160
37	247	155
38	311	212
39	327	200
40	355	197
41	229	114
42	364	178
43	324	182
44	286	126
45	389	206
46	298	131
47	285	139
48	349	183
49	320	174
50	418	257
51	284	165
52	412	231
53	384	199
54	406	223
55	392	267
56	376	219
57	376	196
58	391	265
59	356	235
60	472	377
61	259	197
62	424	284
63	350	265

64	329	303
65	450	433
66	280	247
67	334	356
68	260	367
69	254	308
70	308	466
71	157	257
72	229	341
73	182	323
74	166	337
75	197	413
76	139	282
77	86	225
78	112	345
79	83	216
80	89	285
81	51	147
82	51	145
83	28	134
84	30	111
85	37	141
86	30	94
87	11	58
88	13	59
89	4	38
90	11	43
91	3	27
92	3	17
93	3	11
94	2	8
95	3	11
96	1	8
97	1	4
98	2	6
99	0	5
100>	2	12
возраст неизвесте н	14	2
всего	32668	27434

*Задача 10\*<sup>54</sup>. Измерение выигрыша в ожидаемой продолжительности жизни*

Сравните смертность французов на 50-летнем интервале на основе ряда значений ожидаемой продолжительности жизни:

Точный возраст	Ожидаемая продолжительность жизни	
	в 1930-1931 гг.	в 1980-1982 гг.
0	59.77	78.58
1	63.12	78.23
5	60.85	74.39
10	56.45	69.48
15	51.93	64.56
20	47.82	59.71
30	39.87	50.03
40	31.68	40.46
50	23.65	31.21
60	16.15	22.45
70	9.76	14.32
80	5.23	7.71
90	2.89	3.69

- Рассчитайте для каждого возраста среднее число лет выигрыша в продолжительности жизни и представьте результаты графически
- Представьте на логарифмической шкале серию продолжительности жизни. Прокомментируйте оба полученных графика.
- Объясните, как рассчитывать  ${}_1q_0$ ,  ${}_4q_1$  и  ${}_5q_5$ , предположив, что смерти распределены равномерно в каждом интервале возраста. Выведите общую формулу, позволяющую получить  ${}_aq_x$  на основе серии значений продолжительности жизни.
- Рассчитайте для каждого периода ряд коэффициентов и постройте для каждой возрастной группы соотношение  $q_{(1980-1982)}/q_{(1930/1931)}$ . Прокомментируйте полученные результаты.
- Рассчитайте для среднего числа лет, выигранных в продолжительности жизни, часть, вызванную только снижением детской смертности, и часть, вызванную снижением смертности в возрастах 1 – 5 лет. Прокомментируйте полученные результаты.

<sup>54</sup> Dittgen A., Lamy-Festy M., Travaux pratiques d'analyse démographique. – Masson, Paris, 1989

*Задача 11*

Используя методику анализа, приведенную в решении к Задаче 11, и данные таблицы (см. ниже), проанализируйте выигрыш/потери от изменения в продолжительности жизни в разных возрастах в населении России с 1897 по 2001 гг. Укажите периоды выигрыша и потерь. С какими возрастными группами связаны удлинение и сокращение продолжительности жизни в разные исторические периоды? Сравните изменения в продолжительности жизни мужчин и женщин (все население).

Пол и возраст	1896	1926	1958	1969	1978	198	199	2001
	-- 1897	-- 1927	-- 1959	-- 1970	-- 1979	9	6	
<b>Мужчины</b>								
0	29,4	40,2	63	63,2	61,7	64,2	59,8	58,96
5	49,7	54,2	61,8	60,2	58,7	60,9	56,2	58,96
10	48,2	51	57,2	55,5	53,9	56,1	51,4	58,07
15	44,5	46,7	52,5	50,7	49,1	51,2	46,5	57,12
20	40,6	42,5	47,9	46	44,5	46,6	42	56,17
25	37	38,6	43,4	41,6	40,2	42,2	37,8	55,21
30	33,4	34,8	39,1	37,4	36	37,8	33,7	50,36
35	29,8	31	34,8	33,3	31,9	33,5	29,8	45,53
40	26,3	27,3	30,6	29,3	28	29,4	26	40,98
45	22,9	23,7	26,6	25,4	24,3	25,3	22,4	36,82
50	19,7	20,4	22,7	21,6	20,8	21,6	19,2	32,82
55	16,7	17,4	19,1	18,1	17,5	18,1	16,3	28,9
60	13,9	14,5	15,9	14,8	14,4	14,9	13,6	25,17
65	11,4	11,8	13	11,9	11,7	12	11,2	21,71
70	9,4	9,4	10,5	9,4	9,2	9,6	9	18,56
75	8	7,5	8,3	7,3	7	7,4	7,2	15,75
80	6,9	5,9	6,5	5,6	5,4	5,7	5,7	13,22
85 и более	6,2	4,7	5	4,3	4,2	4,3	4,4	11
<b>Женщины</b>								
0	31,7	45,6	71,5	73,4	73,1	74,5	72,5	72,34
5	50,4	59	70,1	70,2	69,9	70,9	68,8	72,24
10	48,9	55,9	65,4	65,4	65,1	66	64	71,34
15	45,2	51,6	60,6	60,5	60,2	61,1	59,1	70,39
20	41,4	47,5	55,9	55,7	55,4	56,3	54,3	69,43
25	37,9	43,6	51,2	50,9	50,6	51,5	49,5	68,47
30	34,3	39,8	46,5	46,2	45,8	46,7	44,8	63,58
35	30,9	36	41,9	41,5	41,1	41,9	40,2	58,68

40	27,4	32,1	37,3	36,8	36,5	37,2	35,6	53,89
45	23,9	28,3	32,9	32,3	32	32,6	31,1	49,17
50	20,5	24,5	28,5	27,9	27,6	28,1	26,9	44,48
55	17,2	20,7	24,2	23,6	23,4	23,8	22,8	39,86
60	14,2	17,1	20,1	19,5	19,4	19,7	18,9	35,3
65	11,7	13,9	16,3	15,6	15,6	15,8	15,1	30,86
70	9,8	11,1	12,9	12,1	12,1	12,4	11,7	26,59
75	8,3	8,8	10	9,2	9	9,3	8,9	22,48
80	7,4	6,8	7,7	6,9	6,8	6,8	6,6	18,57
85 и более	6,6	5,1	6	5,1	5,1	4,8	4,7	14,99

*Задача 12<sup>55</sup>. Изучение смертности по причинам*

Нижеследующие таблицы содержат коэффициенты смертности от болезней сердца в Швеции по полу и возрастным группам в 1951 – 1955 гг. и в 1981 – 1985 гг., а также распределение средней численности возрастных групп в каждом из этих периодов.

Коэффициенты смертности от болезней сердца (на 1000)

возраст	1951 – 1955 гг.		1981 – 1985 гг.	
	мужчины	женщины	мужчины	женщины
0-19	0.02	0.02	0.01	0.01
20-29	0.05	0.05	0.05	0.03
30-34	0.12	0.08	0.12	0.05
35-39	0.21	0.19	0.24	0.11
40-44	0.46	0.28	0.56	0.20
45-49	1.10	0.57	1.27	0.35
50-54	2.08	1.03	2.59	0.63
55-59	4.08	2.06	4.91	1.28
60-64	6.90	4.20	8.65	2.62
65-69	11.91	8.42	15.71	5.80
70-74	20.23	16.83	26.15	12.35
75-79	34.49	31.58	44.24	25.71
80 и >	73.26	71.95	93.50	75.73
все возраста	3.47	3.28	6.59	5.63

Средняя численность возрастных групп (на 10000 человек в целом)

возраст	1951 – 1955 гг.			1981 – 1985 гг.		
	мужчины	женщины	оба пола	мужчины	женщины	оба пола
0-19	1516	1449	2965	1324	1261	2585
20-29	659	655	1314	686	657	1343

<sup>55</sup> Dittgen A., Lamy-Festy M., Travaux pratiques d'analyse démographique. – Masson, Paris, 1989. pp. 20 – 23

30-34	393	386	779	374	358	732
35-39	374	367	741	416	394	810
40-44	388	379	767	327	310	637
45-49	354	357	711	269	263	532
50-54	314	325	639	262	266	528
55-59	271	287	558	274	284	558
60-64	224	248	472	287	305	592
65-69	189	212	401	245	274	519
70-74	140	159	299	213	257	470
75-79	94	108	202	145	203	348
80 и >	67	85	152	123	223	346
все возраста	4983	5017	10000	4945	5055	10000

Прокомментируйте распределение по полу и периодам этих коэффициентов по возрастным группам и сравните с общими коэффициентами.

Рассчитайте для каждого пола и периода стандартизованный коэффициент смертности от этой причины смерти, взяв в качестве стандартной возрастную структуру, представленную ниже (для обоих полов, 1968 год).

возраст	численность	возраст	численность
0-19	2818	55-59	650
20-29	1517	60-64	576
30-34	572	65-69	482
35-39	576	70-74	370
40-44	626	75-79	253
45-49	691	80 и >	223
50-54	646	всего	10000

Рассчитайте для каждого пола и периода долю, которую представляет смертность от болезней сердца в общей смертности, используя, с одной стороны, общие коэффициенты, и с другой – стандартизованные показатели, учитывая, что коэффициенты общей смертности этой страны были следующими в течение двух изучаемых периодов (на 1000):

показатели	1951 – 1955 гг.		1981 – 1985 гг.	
	мужчины	женщины	мужчины	женщины
Общий коэффициент смертности	9.79	9.25	11.98	10.06
Стандартизованный коэффициент при структуре 1968 года	12.82	10.89	11.16	6.64

Почему эта доля оказывается иной в зависимости от используемых коэффициентов? Прокомментируйте эту разницу в зависимости от пола и периода.

#### *Задача 13*

На основе данных приложения (полные таблицы смертности), оцените вероятность умереть в возрасте 40, 50 и 60 лет мужского населения России в конце 19 века. С помощью функции Гомперца-Мейкема получите новые параметры таблицы смертности для возрастов от 20 лет и старше. Сравните новую таблицу смертности с эмпирической таблицей смертности за 1896-1897 гг. Объясните обнаруженные различия.

#### *Задача 14*

На основе данных приложения (полные таблицы смертности), оцените значения параметров функции Гомперца-Мейкема для мужского и женского населения за 1896-1897, 1926 и 2000 гг. Как изменились значения параметров за сто лет? Насколько значимы отличия между значениями параметров для мужского и женского населения.

Указание: для всех таблиц оцените вероятности умереть в одних и тех же трех равноотстоящих друг от друга возрастах.

#### *Задача 15*

Сравните свойства функции Гомперца-Мейкема, Перкса и Вейбулла.

#### *Задача 16*

Постройте график функции Хеллигмена-Полларда.

#### *Задача 17*

В следующей таблице приведены вероятности умереть мужчин из модельных таблиц смертности семейств «Запад», «Восток», «Юг» и «Север». Ожидаемая продолжительность жизни с рождения в этих таблицах равна

продолжительности жизни, наблюдавшейся у мужчин в России в 2000 г. – 59 годам. Сравните возрастные характеристики смертности модельных таблиц и реального населения. Какая из модельных таблиц в наибольшей степени приближается российской таблице смертности мужчин?

	запад	восток	юг	север
возраст	Q(X,N)	Q(X,N)	Q(X,N)	Q(X,N)
0	0,0742	0,0898	0,0952	0,0685
1	0,0277	0,0242	0,0407	0,0379
5	0,0099	0,0086	0,0085	0,0176
10	0,0074	0,0059	0,0059	0,0103
15	0,0119	0,0104	0,0088	0,0148
20	0,0169	0,0150	0,0133	0,0213
25	0,0179	0,0152	0,0135	0,0221
30	0,0203	0,0168	0,0165	0,0237
35	0,0249	0,0208	0,0191	0,0267
40	0,0328	0,0281	0,0259	0,0325
45	0,0451	0,0407	0,0353	0,0405
50	0,0645	0,0613	0,0515	0,0566
55	0,0930	0,0909	0,0747	0,0745
60	0,1364	0,1329	0,1116	0,1098
65	0,1977	0,1966	0,1674	0,1632
70	0,2878	0,2939	0,2649	0,2445
75	0,4121	0,4265	0,4124	0,3607

Указание: таблицы смертности населения России приведены в Приложении 1.

#### Задача 18

В следующей таблице приведены вероятности умереть женщин из модельных таблиц смертности семейств «Запад», «Восток», «Юг» и «Север». Ожидаемая продолжительность жизни с рождения в этих таблицах равна продолжительности жизни, наблюдавшейся у женщин в России в 2000 г. – 72,2 года. Сравните возрастные характеристики смертности модельных таблиц и реального населения. Какая из модельных таблиц в наибольшей степени приближается российской таблице смертности женщин?

	запад	восток	юг	север
возраст	Q(X,N)	Q(X,N)	Q(X,N)	Q(X,N)
0	0,0742	0,0898	0,0952	0,0685
1	0,0277	0,0242	0,0407	0,0379
5	0,0099	0,0086	0,0085	0,0176

10	0,0074	0,0059	0,0059	0,0103
15	0,0119	0,0104	0,0088	0,0148
20	0,0169	0,0150	0,0133	0,0213
25	0,0179	0,0152	0,0135	0,0221
30	0,0203	0,0168	0,0165	0,0237
35	0,0249	0,0208	0,0191	0,0267
40	0,0328	0,0281	0,0259	0,0325
45	0,0451	0,0407	0,0353	0,0405
50	0,0645	0,0613	0,0515	0,0566
55	0,0930	0,0909	0,0747	0,0745
60	0,1364	0,1329	0,1116	0,1098
65	0,1977	0,1966	0,1674	0,1632
70	0,2878	0,2939	0,2649	0,2445
75	0,4121	0,4265	0,4124	0,3607

Указание: таблицы смертности населения России приведены в Приложении 1.

*Задача 19.* Оцените параметры модели Брасса для таблиц смертности России (приложение), используя общий стандарт. Как изменились параметры за исследуемый Вами период времени? Постройте новые таблицы смертности с помощью модели Брасса. Оцените отклонение полученных значений  $l(x)$  от значений функции дожития реальных таблиц. Чем вы объясните эти отклонения?

*Задача 20*

В следующей таблицы приведены значения функции дожития, полученные Галлеем для населения города Бреслау в 1687-1691 гг. Чему равна младенческая смертность в этом населении? С помощью логит-преобразования и общего стандарта смертности найдите новые значения функции дожития. Сравните их с данными Галлея. В чем заключается природа обнаруженных различий? Являются ли найденные Вами значения более точными по сравнению с оценками Галлея?<sup>56</sup>

Таблицы смертности г. Бреслау, 1687-1691

возраст	$l(x)$
0	1000

<sup>56</sup> Newell, p.166

1	855
5	710
10	653
20	592
30	523
40	436
50	335
60	232
70	131
80	34

**Задача 21**

На основе приведенных в таблице данных рассчитайте показатель младенческой смертности в 1969 году в населении Москвы, предварительно нанеся эти данные на демографическую сетку. Используйте все известные Вам способы расчета. Какой из них более точный? Почему?

календарный год	число родившихся	число умерших до 1 года из числа родившихся в данном году	число умерших до 1 года из числа родившихся в предыдущем году
1968	73580		
1969	78376	1458	253

**Задача 22**

На основе данных таблицы, рассчитайте показатели младенческой смертности, неонатальной и постнеонатальной смертности в некоторых странах Европы и проанализируйте их динамику. Какие факторы повлияли на снижение младенческой смертности в Европе после Второй мировой войны?

годы	Дания			Испания		
	родившиеся живыми	умершие 0-27 дней	умершие 28-364 дней	родившиеся живыми	умершие 0-27 дней	умершие 28-364 дней
1950	79558	1448	997	558965	8425	29750
1960	76077	1194	442	654537	12150	15463
1970	70802	777	228	656102	10314	7047
1980	57293	318	166	571018	4854	2194
1990	63433	289	180	401425	1997	1053
годы	Финляндия			Португалия		

	родившиеся живыми	умершие 0-27 дней	умершие 28-364 дней	родившиеся живыми	умершие 0-27 дней	умершие 28-364 дней
1950	98065	2141	2127	205163	6413	12895
1960	82129	1179	548	213895	5978	10598
1970	64559	676	178	172891	4393	5634
1980	63064	322	159	158352	2447	1405
1990	65549	245	129	116383	815	464
годы	<b>Швеция</b>			<b>Италия</b>		
	родившиеся живыми	умершие 0-27 дней	умершие 28-364 дней	родившиеся живыми	умершие 0-27 дней	умершие 28-364 дней
1950	115414	1751	670	908622	27066	30943
1960	102219	1413	286	910192	21798	18152
1970	110150	1007	205	901472	18551	8088
1980	97064	480	191	640401	7209	2111
1990	123938	434	305	569255	3620	1034
годы	<b>Франция</b>			<b>Венгрия</b>		
	родившиеся живыми	умершие 0-27 дней	умершие 28-364 дней	родившиеся живыми	умершие 0-27 дней	умершие 28-364 дней
1950	861310	17684	22973	195567	8012	8747
1960	819819	14479	8005	146461	4008	2968
1970	850381	10741	4696	151819	4312	1137
1980	800376	4603	3407	148673	2651	792
1990	762407	2708	2891	125679	1361	502

*Задача 23. Анализ сезонности младенческой смертности в Москве*

На основе данных о помесечном распределении смертей в возрасте до 1 года и рождений в Москве (оба пола) сделайте выводы о влиянии сезонности на динамику младенческой смертности. Для этого рассчитайте индексы сезонности и нанесите их на графики.

Числа умерших до 1 года по месяцам:

месяцы	годы						
	1927	1941	1957	1967	1977	1987	1997
январь	623	954	161	145	193	217	93
февраль	627	751	176	145	179	233	84
март	693	896	178	155	211	207	79
апрель	701	827	155	138	194	215	81
май	602	812	197	143	197	213	81
июнь	544	709	147	154	159	201	80
июль	903	955	148	101	152	233	101
август	736	792	156	110	171	195	80
сентябрь	528	578	156	122	151	199	78
октябрь	490	487	180	129	163	225	70

ноябрь	393	467	142	108	180	175	70
декабрь	478	501	203	127	188	187	78
итого	7318	8729	1999	1577	2138	2500	975

*Задача 24. Анализ компонент младенческой смертности во Франции*

В таблице представлены данные о числах родившихся и умерших до 1 года во Франции:

Годы	Умершие в возрасте				Родившиеся живыми
	0 – 6 дней	0 – 27 дней	от 28 дней до 1 года	до 1 года	
1980	3522	4642	3442	8003	800376
1985	2613	3535	2843	6378	768431
1990	1906	2745	2897	5566	762407
1995	1605	2116	1459	3575	729609
2000	1550	2169	1240	3409	774782

Рассчитайте все известные вам показатели младенческой смертности и прокомментируйте их динамику.

**РЕШЕНИЯ**

*Решение Задачи 10*

Среднее число лет жизни, выигранных в каждом возрасте, задано разницей продолжительности предстоящей жизни двух периодов.

точный возраст х	выигрыш в продолжительности и жизни	точный возраст х	выигрыш в продолжительности и жизни
0	18.81	40	8.78
1	15.11	50	7.56
5	13.54	60	6.30
10	13.03	70	4.56
15	12.63	80	2.48
20	11.89	90	0.80
30	19.16		

Логарифмический масштаб показывает относительные различия и позволяет измерить соотношение двух ожидаемых продолжительностей жизни в одном и том же возрасте, определяя непосредственно расстояние между ними. Ожидаемая продолжительность жизни в 60 лет в 1980 – 1981 гг.

представляет собой примерно 1,4 продолжительности жизни в том же возрасте в 1930 – 1931 гг., то есть выигрыш составляет 40% между двумя датами.

Ниже приводятся выигрыши для различных возрастов, полученные в результате вычислений, которые можно увидеть непосредственно на графике с очень детальной масштабной сеткой:

точный возраст x	выигрыш в продолжительность и жизни, в %	точный возраст x	выигрыш в продолжительность и жизни, в %
0	31	40	28
1	24	50	32
5	22	60	39
10	23	70	47
15	24	80	47
20	25	90	28
30	26		

Вне зависимости от возраста и от того, относительные или абсолютные рассматриваются величины, различия в продолжительности жизни всегда позитивны и часто довольно заметны, но абсолютное значение выигрыша падает с возрастом, хотя относительное значение выигрыша минимально в возрасте 5 лет и максимально в возрастах 70-80 лет.

После заметного падения между рождением и первым годом жизни, начиная с пятого года жизни число дополнительных лет жизни регулярно сокращается. Относительный выигрыш стабилен между 1 и 30 годами (от 22 до 25 %), но в 50 лет он вновь приобретает значение, равное значению при рождении (31%), и начиная с этого возраста растет очень сильно, достигая более 47 % в 80 лет. В 90 лет он опять сокращается, наталкиваясь на биологические границы человеческой жизни.

В зависимости от того, какое различие, абсолютное или относительное, принимается во внимание, либо новорожденные (абсолютный выигрыш 18.81 года), либо 80-летние старики (относительный выигрыш 47%) имеют больше выгод от снижения смертности.

Чтобы рассчитать  ${}_1q_0$  на основе серии значений ожидаемой продолжительности предстоящей жизни, используется сумма прожитых

новорожденными лет таблицы смертности  $e_0|_0$ , составленная из лет, прожитых теми, кто умер до возраста 1 год, и теми, кто дожил до этого возраста:

$$e_0|_0 = 0.5d(0,1) - (e_1+1)l_1,$$

где:  $0.5d(0,1)$  – сумма лет, прожитых умершими между рождением и 1-м годом жизни;  $(e_1+1)l_1$  – сумма лет, прожитых совокупностью  $l_1$  на момент смерти ( $e_1$  – ожидаемая продолжительность предстоящей жизни в возрасте 1 год).

Используя табличные вероятности умереть, можно записать это равенство в следующей форме:

$$e_0|_0 = 0.5l_{01}q_0 + (e_1+1)l_0(1-q_0), \text{ потому что } d(0,1) = l_{01}q_0 \text{ и } l_1 = l_0 - l_{01}q_0, \text{ откуда}$$

$$e_0 = 0.5l_{01}q_0 + (e_1+1)(1-q_0) \text{ и } l_1q_0(1+e_1-0.5) = e_1 - e_0 + 1, \text{ то есть } l_1q_0 = (e_1 - e_0 + 1)/(e_1 + 0.5).$$

Чтобы рассчитать  $l_1q_0$ , введем совокупность лет, прожитых после возраста 1 год ( $e_1l_1$ ) теми, кто умер, не достигнув возраста 5 лет, и теми, кто дожил до этого возраста:

$$e_1l_1 = 2d(1,5) + (e_5+4)l_5$$

где  $2d(1,5)$  – сумма лет, прожитых после достижения возраста 1 год умершими между возрастом 1 год и 5 лет, и  $(e_5+4)l_5$  – сумма лет, прожитых после достижения возраста 1 год теми, кто дожил до 5 лет, откуда  $e_1 = 2l_1q_1 + (e_5+4)(1-l_1q_1)$  и как в предыдущем случае:  $l_1q_1 = (e_5 - e_1 + 4)/(e_5 + 2)$

Проводя аналогичные рассуждения, получаем  $l_5q_5$ , после чего имеем  $e_5l_5 = 2.5l_5q_5 + (e_{10}+5)(1-l_5q_5)$ , откуда  $l_5q_5 = (e_{10} - e_5 + 5)/(e_{10} + 2.5)$ .

Наконец получаем общую формулу:  $e_xl_x = 0.5a_1q_0 + (e_{x+a}+a)(1-aq_x)$ . Она позволяет, используя те же гипотезы, независимо от значений  $a$  и  $x$  определить вероятность  $aq_x$ :  $aq_x = (e_{x+a} - e_x + a)/(e_{x+a} + 0.5a)$ .

Используя эти формулы, можно рассчитать 2 серии вероятностей умереть для периодов 1930-1931 и 1980-1982 гг. и соотношение  $q_{(1980-1982)}/q_{(1930-1931)}$ .

Получим следующую таблицу:

возраст	вероятности умереть		(1)/(2)
	1930 – 1931 гг.	1980 – 1982 гг.	
	(1)	(2)	
0	684	83	0.121
1-4	280	21	0.076
5-9	102	12	0.123

10-14	88	12	0.135
15-19	177	24	0.136
20-29	457	58	0.127
30-39	494	95	0.191
40-49	688	207	0.301
50-59	1182	452	0.382
60-69	2446	968	0.396
70-79	5347	2667	0.499
80-89	9709	6881	0.709

Каким бы ни был интервал возраста, риск умереть понижается в очень заметной пропорции: на 87.9% (1-0.121) в первый год, и на 92.4% (1-0.076) между 1-м и 5-м годами жизни.

Чтобы определить, какая часть выигрыша в 18.18 года между двумя периодами вызвана только снижением детской смертности, необходимо рассчитать ожидаемую продолжительность жизни для населения, в котором смертность после возраста 1 год не менялась бы, при ожидаемой продолжительности жизни  $e_1$  на уровне 1930 – 1931 гг. и при риске умереть на первом году жизни, характерном для 1980 – 1982 гг.

$$\text{Поскольку } e_0 = 0.5 \cdot q_0 + (e_1 + 1)(1 - q_0),$$

$$\text{то } e_0 = (0.5 \cdot 0.0083) + (63.12 + 1)(1 - 0.0083) = 63.59 \text{ года,}$$

или абсолютный выигрыш составит  $63.59 - 59.77 = 3.84$  года и относительный выигрыш  $3.84 / 18.81 = 20.4\%$ .

Для того, чтобы определить, какая часть выигрыша вызвана снижением смертности в возрастах 1 – 5 лет, необходимо рассчитать, какой бы была продолжительность предстоящей жизни в населении с вероятностью умереть до года и продолжительностью предстоящей жизни для 5 лет на уровне 1930 – 1931 гг. и коэффициентом смертности в возрастном интервале 1 – 5 лет на уровне 1980 – 1982 гг.

Так как

$$e_{0|0} = 0.5 \cdot l_{01} q_0 + 3 \cdot l_{14} q_1 + (e_5 + 5) \cdot l_5 = 0.5 \cdot l_{01} q_0 + 3 \cdot l_0 (1 - q_0) \cdot 4 q_1 + (e_5 + 5) (1 - q_0) (1 - 4 q_1),$$

получим

$e_0 = (0.5 * 0.0684) + [3(1 - 0.0684) * 0.0021] + (60.85 + 5)(1 - 0.0684)(1 - 0.0021) = 61.26$  года,  
или абсолютный выигрыш составил бы  $61.26 - 59.77 = 1.49$  года и относительный  
выигрыш –  $1.49 / 18.81 = 7.9\%$ .

Таким образом, одно только снижение смертности на первом году жизни влечет за собой рост ожидаемой продолжительности жизни на 20%, тогда как снижение смертности в течение 4-х последующих лет увеличивает продолжительность жизни менее чем на 8%.

## РАЗДЕЛ 5. АНАЛИЗ РОЖДАЕМОСТИ

**Рождаемость** – демографическое явление, связанное с рождениями. От рождаемости необходимо отличать **плодовитость** – физиологическую способность женщины к зачатию и рождению ребенка, – и **естественную рождаемость**, то есть рождаемость, не ограниченную сознательно ни использованием искусственных абортов, ни противозачаточными мерами.

Анализ рождаемости по ряду причин отличается от анализа смертности:

- не все население подвержено риску иметь детей;
- рождаемость может измеряться по отношению к отцу, к матери или к семейной паре;
- явление деторождения относится одновременно и к ребенку, и к родителям;
- один индивид может стать родителем дважды в течение года и даже в течение часа;
- велико влияние на рождаемость предыдущей демографической истории (числа уже рожденных детей, брачности, смертности).

Наиболее важные переменные при изучении рождаемости:

- возраст матери;
- возрастное-половое распределение населения, и, в частности, распределение по возрасту женщин репродуктивного возраста (15 – 49 лет);
- брачное состояние матери и брачный состав женского населения.

### 5.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ РОЖДАЕМОСТИ

#### 5.1.1. Система коэффициентов рождаемости

**Общий коэффициент рождаемости** – среднее число родившихся живыми в данном календарном году на 1000 человек населения. Рассчитывается по формуле:

$$n = \frac{N}{P \cdot T} 1000,$$

где  $N$  – число рожденных живыми в населении в течение календарного периода,  $\bar{P}$  – средняя численность населения,  $n$  – общий коэффициент

рождаемости,  $T$  – длина календарного периода, для которого рассчитывается коэффициент.

**Специальный коэффициент рождаемости** представляет собой среднее число рождений, приходящееся на 1000 женщин репродуктивного возраста (15 – 49 лет):

$$f_{\text{спец}} = \frac{N}{P_{15-49}^f \cdot T} \cdot 1000$$

Специальный коэффициент рождаемости можно рассчитать для рождений в браке и вне брака.  $f_{\text{спец.}} = f_{\text{спец.}}^{\text{брачн.}} + f_{\text{спец.}}^{\text{внебрачн.}}$

**Возрастной коэффициент рождаемости** характеризует среднее число детей, родившихся в течение прожитого года у 1000 женщин в возрасте  $x$ :

$$f_x = \frac{N_x}{P_x^f \cdot T} \cdot 1000.$$

Возрастные коэффициенты рождаемости можно рассчитать для брачных и внебрачных рождений, для первых, вторых и т.д. рождений.

**Коэффициент суммарной рождаемости** отражает среднее число детей, рожденных одной женщиной в течение ее жизни, при условии, что в каждом возрасте ее рождаемость будет соответствовать возрастному коэффициенту рождаемости соответствующего года, для которого рассчитан суммарный коэффициент. Суммарные коэффициенты рассчитываются как сумма возрастных коэффициентов с учетом длины возрастного интервала. Суммарный коэффициент рождаемости рассчитывается следующим образом:

$$TFR = \sum_{x=15}^{49} n \cdot f_x, \text{ где } n - \text{длина возрастного интервала.}$$

В поперечном анализе можно анализировать рождаемость только при том допущении, что все рассматриваемые реальные поколения имеют одинаковую репродуктивную историю, т.е. что возрастные коэффициенты рождаемости от поколения к поколению не меняются.

Коэффициент суммарной рождаемости, рассчитанный для календарного года (условное поколение), и показатель итоговой рождаемости реального поколения похожи по способу расчета: оба получают сложением возрастных коэффициентов рождаемости во всех репродуктивных возрастах:

Это сходство – не более чем видимость, поскольку при расчете суммарного коэффициента (TFR) суммируются возрастные коэффициенты одного года, а при расчете показателя итоговой рождаемости (IP) суммируются повозрастные коэффициенты одного поколения:

$$TFR = \sum_{x=15}^{49} f_x^t \text{ где } t \text{ означает конкретный год}$$

$$IP = \sum_{x=15}^{49} f_x^g \text{ где } g \text{ означает конкретное поколение}$$

Коэффициент суммарной рождаемости и итоговую рождаемость также можно рассчитать для брачных и внебрачных рождений, первых, вторых и т.д. рождений. В случае омоложения рождаемости суммарный коэффициент первых рождений, рассчитанный для условного поколения, может превысить единицу.

Суммарный коэффициент общей рождаемости равен сумме коэффициентов по всем очередностям рождений:  $TFR = TFR(1) + TFR(2) + \dots + TFR(i)$ .

Помимо возрастных коэффициентов рождаемости, рассчитывают также **коэффициенты рождаемости в зависимости от продолжительности брака**, а также показатель среднего числа детей, приходящихся на один брак – **показатель продуктивности брака**.

### 5.1.2. Календарь рождаемости

Календарь рождаемости характеризуется средним возрастом матери при рождении ребенка, который рассчитывается как средняя из возрастов матерей при рождении ребенка, взвешенная возрастными коэффициентами рождаемости. При этом принимают гипотезу, что средний возраст матери, родившей ребенка в интервале возраста, приходится на середину интервала:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{15}^{49} (x + \frac{n}{2}) \cdot f_x}{\sum_{15}^{49} f_x},$$

где  $\bar{x}$  – *средний возраст матери при рождении ребенка*;

$x$  – *начало возрастного интервала, в котором наступило рождение ребенка*;

$n$  – *длина возрастного интервала, в котором наступило рождение ребенка*;

$(x + n/2)$  – середина возрастного интервала или средний возраст матери при рождении ребенка в данном интервале;

$n f_x$  – возрастной показатель интенсивности рождений у женщин в возрасте  $x$  (возрастной коэффициент рождаемости, среднее число детей, родившихся у 1000 женщин данного возраста)

Средний возраст матери при рождении ребенка можно также рассчитать для брачных и внебрачных рождений, а также для рождений различной очередности.

Изменение возрастной модели рождаемости удобно анализировать при помощи графиков возрастных коэффициентов рождаемости за ряд лет (рис. \_\_\_ а и б). Например, на Рис. 5.1а видно, что за послевоенный период уровень рождаемости снизился, при этом в целом рождаемость «постарела», а на Рис. 5.1б видно, что снижение рождаемости шло в первую очередь за счет молодых возрастов 20 – 24 и 25 – 29 лет.

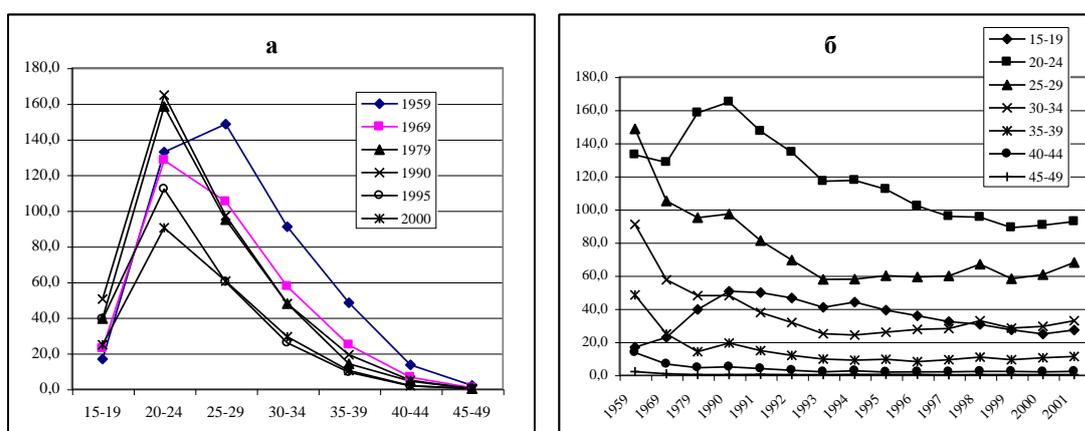


Рис. 5.1 Возрастные коэффициенты рождаемости Новгородской области (число родившихся живыми на 1000 женщин данной возрастной группы)

Календарь рождаемости можно также охарактеризовать при помощи показателей длины протогенетического (между браком и первым рождением) и интергенетических (между рожденьями) интервалов.

### 5.1.3. Вероятность увеличения семьи

Вероятность увеличения семьи или вероятность рождения следующего (или в общем виде  $(i+1)$ -го) ребенка можно рассчитать следующим образом: для матери, имеющей уже как минимум  $i$  детей вероятность иметь  $(i+1)$ -го ребенка равна  $a(i)=TFR(i+1)/TFR(i)$ . Вероятность рождения первого ребенка:

$$a(1)=1-TFR(1).$$

На основе суммарных коэффициентов рождаемости разной очередности можно также рассчитать долю бездетных женщин  $1-TFR(1)$ , долю женщин, родивших по крайней мере одного ребенка  $TFR(1)-TFR(2)$  и т.п.

### 5.1.4. Индексы рождаемости

Индексы рождаемости используются для того, чтобы оценить, в какой степени наблюдаемый в той или иной стране уровень рождаемости отличается от так называемой «естественной рождаемости». Понятие естественной рождаемости было введено в научный оборот французским демографом Л. Анри в 1961 году для обозначения рождаемости, которая не ограничивается искусственно на уровне семьи при помощи контрацепции и абортов. В качестве мер естественной рождаемости могут использоваться: 1) модель рождаемости гуттеритов<sup>57</sup>; 2) шкала Л. Анри, основанная на вычислении средних показателей для нескольких рядов возрастных коэффициентов брачной рождаемости населения, не ограничивающих рождаемость; 3) гипотетический минимум естественной рождаемости (ГМЕР) В.А. Борисова (табл. 5.1).

Индексы рождаемости Э. Коула основаны на использовании в качестве стандарта уровней возрастной рождаемости Гуттеритов и позволяют оценить влияние на общий уровень рождаемости брачной структуры и интенсивностей брачной и внебрачной рождаемости. Сравнивая брачность и рождаемость реального населения с показателями гуттеритов, индексы Коула позволяют оценить внутрисемейное ограничение рождаемости.

---

<sup>57</sup> Гуттериты – секта, проживающая в Серенной Америке. Члены этой секты не используют контрацепцию и аборты для регулирования деторождения. В секте также наблюдается ранняя и практически всеобщая брачность женщин.

Индекс рождаемости рассчитывается как отношение реального числа рождений к гипотетическому при той же возрастной структуре женщин и максимальных возрастных коэффициентах рождаемости.

Таблица 5.1. Примеры стандартных коэффициентов рождаемости (на 1000 женщин)

возраст	Максимум по Э. Коулу (гуттериты, браки 1921 – 1930 гг.)	ГМЕР (гипотетический минимум естественной рождаемости)
15-19	300	Фактическое число рождений в данной возрастной группе
20-24	550	400
25-29	502	377
30-34	447	349
35-39	406	279
40-44	222	155
45-49	61	31

Источник: Народонаселение. Энциклопедический словарь. – М.: БСЭ, 1994. – с. 151

**Сравнительный индекс общей рождаемости** – отношение наблюдаемого числа рождений в данном населении к гипотетическому числу рождений при условии, что женщины этого населения в каждой возрастной группе имеют максимальную рождаемость (рождаемость гуттеритов):

$$I_f = \frac{N}{\sum_x P_x^f F_x}$$

**Сравнительный индекс брачной рождаемости** – отношение числа рождений у замужних женщин к числу рождений, которое наблюдалось бы при условии, что замужние женщины имеют неконтролируемую рождаемость:

$$I_g = \frac{N^m}{\sum_x P_x^{fm} F_x}$$

**Сравнительный индекс внебрачной рождаемости** – отношение числа рождений у незамужних женщин к числу рождений, которое наблюдалось бы при условии, что незамужние женщины имеют неконтролируемую рождаемость:

$$I_h = \frac{N^{um}}{\sum_x P_x^{fum} F_x}$$

**Индекс доли замужних женщин (индекс брачной структуры)** измеряет вклад брака в наиболее высокую рождаемость населения. Это отношение числа рождений, которые имели бы место при условии, что замужние женщины данного населения имели бы рождаемость гуттеритов, к числу рождений, которое имело бы место при условии, если бы все женщины (замужние или нет) имели бы такую рождаемость.

$$I_m = \frac{\sum_x P_x^{fm} F_x}{\sum_x P_x^f F_x}$$

Между индексами рождаемости существует следующее соотношение:

$$I_f = I_g * I_m + I_h(1 - I_m)$$

Обозначения:

$P_x^f$  – численность женщин в возрасте  $x$ ;

$P_x^{fm}$  – численность замужних женщин в возрасте  $x$ ;

$P_x^{fim}$  – численность женщин, не состоящих в браке в возрасте  $x$ ;

$N$  – общее число родившихся;

$N^m$  – число родившихся у женщин, состоящих в браке;

$N^{im}$  – число родившихся у женщин, не состоящих в браке;

$F_x$  – коэффициент рождаемости гуттеритов (естественная рождаемость, наиболее высокая из когда-либо наблюдавшихся в мире, или ГМЕР).

#### 5.1.5. Таблицы рождаемости

Демографическая таблица рождаемости представляет собой систему упорядоченных по возрасту рядов чисел, отражающих процесс деторождения в некотором теоретическом поколении женщин с фиксированной численностью в возрасте 15 лет. Таблицы рождаемости могут быть построены для реальных и условных поколений.

Общие таблицы рождаемости строятся без учета очередности рождения, специальные – с учетом очередности рождения. Оба типа таблиц можно строить как для всех женщин, так и для замужних женщин. Таблицы продуктивности брака строятся для замужних женщин по длительности существования брака.

Общие таблицы рождаемости включают следующие показатели:

- возрастные коэффициенты рождаемости (число рождений, приходящееся на 1000 женщин соответствующего возраста);
- кумулятивные коэффициенты рождаемости или суммарное число рождений к данному возрасту (число рождений на 1000 женщин к данному возрасту без учета убыли женского поколения под влиянием смертности и миграции, сумма возрастных коэффициентов от 15 лет до данного возраста);
- суммарные коэффициенты рождаемости (среднее число детей, рожденных женщиной за весь репродуктивный период при условии сохранения на протяжении всей жизни возрастных коэффициентов рождаемости того года, для которого рассчитан показатель – в условном поколении).

Основные показатели специальной таблицы рождаемости:

- вероятность родить следующего ребенка до данного возраста;
- вероятность не родить следующего ребенка до данного возраста;
- вероятность родить следующего ребенка в данном возрастном интервале для женщин, родивших предыдущего.

## 5.2. МОДЕЛЬ РОЖДАЕМОСТИ КОУЛА-ТРАССЕЛА

Известный французский демограф Луи Анри<sup>58</sup> установил, что человеческие популяции, в которых наблюдается естественная рождаемость, т.е. отсутствует сознательный контроль деторождений, могли заметно различаться по уровню рождаемости, но их возрастные распределения интенсивности рождений в браке имели примерно одинаковую форму. На основе обобщения данных для ряда исторических популяций Л. Анри построил возрастную модель естественной рождаемости. Различия в уровнях рождаемости между популяциями с естественной рождаемостью обусловлены различными факторами (состоянием здоровья, практикой лактации и др.).

---

<sup>58</sup>Henry Luis, «Some data on natural fertility», *Eugenics Quarterly*, vol. VIII, No. 2, June, 1961. pp. 81-91.

В 1974 г. американские демографы Коул и Трассел<sup>59</sup> использовали возрастную модель естественной рождаемости Анри для построения модели, позволяющей оценить уровень распространенности контроля рождаемости в том или ином населении. В основу модели было положено предположение, что брачная контролируемая рождаемость  $r(x)$  в возрасте  $x$  отклоняется от естественной рождаемости  $n(x)$  в соответствии с определенным стандартом  $v(x)$  (см. таблицу 5.2.). В общем виде модель Коула-Трассела записывается следующим образом:

$$r(x) = M \cdot n(x) \cdot e^{m \cdot v(x)}, \quad (1)$$

где  $r(x)$  – коэффициент брачной рождаемости в возрасте  $x$ ;

$n(x)$  – коэффициенты естественной рождаемости в возрасте  $x$ ;

$v(x)$  – возрастная модель отклонения от естественной рождаемости;

$m$  – уровень распространенности контроля рождаемости;

$M$  – уровень брачной рождаемости.

Таблица 5.2. Возрастная модель естественной рождаемости  $n(x)$  и стандартное отклонение от естественной рождаемости  $v(x)$ .

показатель	Возрастные группы					
	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
$n(x)$	0,460	0,431	0,395	0,322	0,167	0,024
$v(x)$	0	-0,278	-0,667	-1,042	-1,414	-1,671

Существует несколько подходов для оценки параметра  $m$  для реального населения. Согласно самому простому из них, предложенному Коулом и Трасселом<sup>60</sup>, вначале находим  $M$ :  $M = r(20-24)/n(20-24)$ .

$$\text{Тогда: } m = 0.2 \sum_{25}^{49} \ln[(r(a)/M \cdot n(a)]/v(a) \quad (2)$$

Второй подход заключается в линейном преобразовании уравнения (1) и оценки параметров  $M$  и  $m$  следующего регрессионного уравнения:

<sup>59</sup> Coale A.J., Trussell T.J., "Model fertility schedules^ variations in the age structure of childbearing in human population", Population Index, Vol.40, No 2, 1974. pp. 185-258.

<sup>60</sup> Coale A.J., Trussell T.J., Technical note: finding the two parameters that specify a model schedule of marital fertility". Population Index. Vol. 44, No 2, 1978. pp.202-213.

$$\ln\left(\frac{r(a)}{n(a)}\right) = \ln M + m \cdot v(a).$$

Коул и Трассел рекомендовали решать уравнение простым методом наименьших квадратов в возрастном интервале от 20 до 44 лет включительно. Если найденная величина  $m$  положительна, то это означает что население ограничивает рождаемость. Если  $m$  отрицательно – то население не ограничивает рождаемость, а его уровень рождаемости даже превосходит естественную рождаемость в модели Анри. Если  $m=0$ , то эмпирическое и теоретическое распределения совпадают, и процесс деторождения в семьях также не ограничивается. Следует отметить, что модель Коула-Трассела используется при прогнозировании изменений в возрастных распределениях интенсивности рождаемости.

*Пример 1. Найдем параметры модели Коула-Трассела для брачной рождаемости в Кыргызстане, 1988-1989 гг.*

Возраст	$n(a)$	$v(a)$	$r(a)$	$\ln(r(a)/n(a))$
20-24	0,46	0	0,358	-0,25183
25-29	0,431	-0,279	0,235	-0,6079
30-34	0,395	-0,667	0,145	-1,00408
35-39	0,322	-1,042	0,075	-1,46201
40-44	0,167	-1,414	0,029	-1,73887

Методом наименьших квадратов найдем  $\ln M = -0.289$ . Откуда  $M = 0.749$  или 76% от естественной рождаемости в возрасте 20-24 лет. Это означает, что в молодых возрастах замужние женщины практически не ограничивали процесс деторождений. Контроль рождаемости происходил главным образом в старших возрастах, о чем свидетельствовало значения меры контроля рождаемости  $m = 1,064$ .

## ЗАДАЧИ

*Задача 1\*. Расчет показателей рождаемости по очередности рождений*

В таблице приведены сведения о числе рождений в брачной когорте, состоящей из 10000 супружеских пар. Рождение не исключает супружескую пару из-под наблюдения. Рождения распределены по продолжительности брака. Мы принимаем, что после 15 лет брака рождения отсутствуют.

Приняв необходимые гипотезы, рассчитать:

1) Среднее число рождений, приходящееся на 1 брак, в целом и по очередности рождений;

2) Среднюю длительность брака к моменту рождения ребенка, в целом и по очередности рождений;

3) Таблицу рождаемости для первых рождений:

продолжительность брака (исполнившихся лет)	Числа рождений по очередности					
	все ранги	1-е	2-е	3-и	4-е	5-е и выше
0	3517	3485	31	1	0	0
1	2676	2078	564	32	2	0
2	2098	813	1138	132	14	1
3	1739	460	825	395	51	8
4	1513	307	614	419	149	24
5	1313	208	456	375	201	73
6	1167	151	359	316	207	134
7	1024	111	262	282	200	169
8	883	73	193	221	194	202
9	752	57	138	181	155	221
10	687	42	117	153	138	237
11	563	30	87	111	108	227
12	464	22	64	89	90	199
13	415	17	48	74	77	199
14	350	11	36	59	62	182
15	298	11	28	49	49	161
итого	19459	7876	4960	2889	1697	2037

#### Задача 2

В таблице приведены данные о численности женщин репродуктивного возраста и числе рождений, распределенных по возрасту матери и очередности рождения. Рассчитайте:

1) повозрастные коэффициенты рождаемости в целом и для рождений разной очередности;

2) суммарные коэффициенты рождаемости: общий и по очередности рождений;

3) средний возраст матери при рождении ребенка: общий и по очередности рождений;

4) вероятности увеличения семьи.

возраст	средняя	числа родившихся по очередности рождения
---------	---------	--

	численность женщин	все дети	первые	вторые	третьи	четвертые и далее
15-19	5403272	209499	195707	13302	470	20
20-24	5145372	537861	402780	118241	14397	2443
25-29	4646106	306005	120279	142539	31528	11659
30-34	5339016	165130	38340	75327	32530	18933
35-39	6488457	69684	14147	22529	17046	15962
40-44	6167087	13827	2628	3063	3137	4999
45-49	5399427	592	84	92	126	290

*Задача 3\*. Расчет вероятностей рождения в зависимости от длительности брака*

В таблице приведены коэффициенты рождаемости для первых рождений в зависимости от длительности брака. Рассчитайте вероятности первых рождений в зависимости от длительности брака

длительность брака	число человеко-лет, прожитых в браке	первые рождения	коэффициент первых рождений
0	8257	3485	0,4221
1	5476	2078	0,3794
2	4030	813	0,2017
3	3394	460	0,1355
4	3010	307	0,102

*Задача 4<sup>61</sup>*

В таблице приведены коэффициенты рождаемости Швеции с середины XVIII века.

1) Рассчитайте суммарные коэффициенты для каждого периода и нанесите их на график. Прокомментируйте их эволюцию.

2) Проследите на демографической сетке 2 группы поколений, находившихся в возрастах 15 – 19 лет соответственно в 1751 – 1755 и 1755 – 1760 гг. Рассчитайте их итоговую рождаемость в 50 лет и средний возраст при рождении ребенка.

3) Осуществите те же расчеты для всех поколений, для которых это возможно. Нанесите на тот же график полученные значения итоговой рождаемости в группах поколений.

<sup>61</sup> Dittgen A., Lamy-Festy M. Travaux pratiques d'analyse démographique. – Paris, 1989. – pp. 126 - 128

4) Рассчитайте для каждого поколения элементы календаря, т.е. долю детей, рожденных в каждом возрасте, в общем числе родившихся у данного поколения. Рассчитайте сумму  $T$  этих элементов календаря для каждого периода и нанесите результаты на тот же график. Прокомментируйте эволюцию этого показателя.

5) Рассчитайте для последнего полного поколения долю детей, рожденных в возрастах 35 – 39, 40 – 44 и 45 – 49 лет. Предположив, что такое распределение сохранится в трех последующих поколениях, оцените их итоговую рождаемость. Нанесите эти значения на график и прокомментируйте.

период	возраст рождения ребенка						
	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
1751-1755	246	1399	2396	2588	1978	1066	240
1756-1760	219	1302	2239	1394	1825	976	233
1761-1765	218	1301	2251	1459	1857	1003	232
1766-1770	209	1217	2202	1463	1878	993	237
1771-1775	195	1134	1990	2218	1757	938	218
1776-1780	206	1196	2144	2429	1908	1062	260
1781-1785	213	1149	2011	2121	1702	885	205
1786-1790	208	1152	2003	2159	1650	921	206
1791-1795	200	1250	2180	2343	1757	964	214
1796-1800	191	1215	2147	2341	1804	924	205
1801-1805	172	1171	2064	2228	1759	942	196
1806-1810	152	1116	2022	2137	1673	900	194
1811-1815	166	1176	2115	2282	1822	939	185
1816-1820	156	1202	2130	2304	1873	1029	193
1821-1825	169	1308	2335	2524	2011	1103	208
1826-1830	140	1271	2250	2412	1963	1072	194
1831-1835	122	1207	2269	2425	1976	1096	183
1836-1840	88	1076	2183	2368	1939	1052	180
1841-1845	87	1014	2139	2425	1998	1106	177
1846-1850	74	943	2001	2324	1973	1072	176
1851-1855	76	936	2000	2306	1953	1107	168
1856-1860	80	1018	2047	2398	2103	1208	201
1861-1865	89	1045	2082	2398	2083	1270	196
1866-1870	86	989	1957	2191	1933	1101	181
1871-1875	91	1059	2071	2330	2031	1213	181
1876-1880	100	1069	2099	2336	2047	1176	190
1881-1885	103	1052	2014	2252	1953	1138	169
1886-1890	108	1074	1985	2187	1904	1080	165
1891-1895	116	1079	1934	2088	1801	1026	144
1896-1900	147	1157	1947	2021	1724	969	127
1901-1905	159	1195	1933	1936	1597	878	114
1906-1910	189	1219	1863	1865	1493	789	100
1911-1915	195	1133	1633	1583	1304	692	81
1916-1920	169	1055	1487	1400	1110	587	73
1921-1925	179	972	1322	1203	935	482	60

1926-1930	178	830	1063	950	726	365	44
1931-1935	178	762	934	800	561	257	30
1936-1940	199	836	1004	832	534	218	23
1941-1945	256	1114	1340	1075	668	236	19
1946-1950	364	1274	1380	1031	621	220	18
1951-1955	378	1282	1283	868	478	159	13
1956-1960	367	1325	1369	855	423	129	9
1961-1965	428	1369	1489	876	393	107	7
1966-1970	419	1272	1373	771	322	76	5
1971-1975	321	1220	1286	669	235	47	2
1976-1980	198	998	1199	649	225	39	2
1981-1985	122	843	1241	768	270	50	2

*Задача 5. Анализ интергенетических интервалов в брачных когортах первых браков*

На основе данных, полученных по результатам микропереписи 1994 года в Москве, рассчитайте среднюю длину интергенетического интервала в брачных когортах и прокомментируйте его динамику.

годы вступления в первый брак	число женщин, вступивших в 1 брак	из них родили первого ребенка		из 1000 родивших первого ребенка родили после вступления в первый брак через (лет):													
		всего	на 1000	менее 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10-14	15 и более		
1950-1954	12135	10887	897	259	318	151	64	41	28	19	16	10	6	17	5		
1955-1959	12961	11887	917	272	343	145	61	37	21	14	9	8	7	18	3		
1960-1964	13654	12450	912	280	321	145	67	36	26	17	13	10	6	15	3		
1965-1969	13613	12587	925	303	320	135	65	35	21	13	9	7	7	12	3		
1970-1974	16837	15708	933	329	334	134	51	27	19	11	9	5	4	9	2		
1975-1979	16866	15634	927	357	338	122	43	24	14	7	5	3	4	8	1		
1980-1984	17200	15701	913	367	314	123	46	25	17	12	10	5	3	3			
1985	3492	3079	882	359	294	134	45	27	20	12	6	2					
1986	3179	2864	901	376	300	120	46	17	16	10	3						
1987	3310	2993	904	396	296	105	51	19	11	4	0						
1988	3385	2783	822	404	319	93	31	23	10								
1989	3258	2671	820	396	305	116	33	14	0								
1990	3420	2559	748	380	315	118	46	0									
1991	2756	1889	685	451	305	78											
1992	2410	1268	526	499	284	2											
1993	2767	791	286	566	23												

*Задача 6. Анализ рождаемости в России*

Основываясь на данных таблицы, рассчитайте суммарные коэффициенты рождаемости и средний возраст матери при рождении ребенка для всего населения. Нанесите эволюцию этих показателей, а также специального коэффициента рождаемости и общего коэффициента рождаемости (Приложение 1), на график и прокомментируйте изменения. С какими

факторами они связаны? Что можно сказать о совместной эволюции суммарного коэффициента и среднего возраста матери?

годы	Числа родившихся на 1000 женщин данного возраста, все население							
	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	15-49
1958-1959	28,4	157,9	156,4	101,9	57,7	19,9	3,0	82,9
1961-1962	27,2	156,7	142,8	91,8	47,3	15,7	1,7	78,4
1962-1963	21,3	156,3	137,3	86,0	44,5	14,9	1,6	73,4
1963-1964	21,0	156,2	130,3	80,5	41,4	14,1	1,5	67,6
1964-1965	22,7	150,8	122,8	77,3	39,2	13,4	1,5	62
1965-1966	24,7	150,3	120,1	77,7	38,1	12,6	1,4	59
1966-1967	25,6	147,8	114,9	77,0	36,1	11,6	1,3	56,4
1967-1968	26,0	143,1	110,9	74,0	33,5	10,8	1,2	53,6
1968-1969	27,3	142,9	109,0	72,4	32,0	10,0	1,2	52,9
1969-1970	28,3	146,9	107,4	69,3	32,2	9,0	1,1	53,4
1970-1971	29,7	152,6	109,5	68,0	32,5	8,3	0,8	54,4
1971-1972	30,9	156,1	116,3	65,6	33,0	7,9	0,7	55,2
1972-1973	31,5	154,7	114,4	63,3	32,5	7,5	0,6	54,9
1973-1974	32,8	155,5	112,8	60,0	30,9	7,3	0,6	55,3
1974-1975	33,9	158,8	110,5	58,6	28,9	7,3	0,6	56,6
1975-1976	34,5	158,8	108	58,2	26,5	7,3	0,5	57,1
1976-1977	35,6	158,6	107,8	60,0	23,7	7,1	0,5	57,7
1977-1978	37,0	156,2	106,5	59,2	21,6	6,7	0,4	58,1
1978-1979	40,8	155	103,1	55,6	19,6	5,9	0,4	59
1979-1980	42,7	157,1	101,2	52,6	18,4	5,1	0,4	59,6
1980-1981	43,6	157,6	102,0	52,0	18,8	4,6	0,4	60,1
1981-1982	43,6	159,1	105,9	54,9	21,9	4,3	0,4	62,4
1982-1983	44,7	163,8	113,1	59,8	23,9	4,1	0,3	65,7
1983-1984	46,1	166,3	114,9	61,2	24,0	3,7	0,3	66,6
1984-1985	46,9	164,2	113,3	60,0	23,2	3,7	0,3	65,0
1985-1986	46,9	165,7	117,5	63,0	24,5	4,3	0,3	66,0
1987	48,5	170,6	122,6	67,8	27,8	6,1	0,2	68,2
1988	49,6	167,9	114,1	61,8	25,6	5,6	0,2	64,5
1989	52,5	163,9	103,1	54,6	22,0	5,0	0,2	59,8
1990	55,0	156,5	93,1	48,2	19,4	4,2	0,1	55,2
1991	54,2	145,9	82,7	41,5	16,5	3,7	0,2	49,8
1992	50,7	132,9	72,4	34,9	13,9	3,2	0,2	43,8
1993	47,0	118,2	63,3	28,7	11,0	2,5	0,2	37,6
1994	48,8	118,6	66,3	29,2	10,6	2,2	0,1	37,6
1995	44,8	112,7	66,5	29,5	10,6	2,2	0,1	35,9
1996	38,9	105,5	65,5	30,1	10,8	2,3	0,1	33,9
1997	35,6	97,6	64,5	31,0	10,7	2,1	0,1	32,4
1998	33,5	98,1	66,7	33,1	11,5	2,3	0,1	32,8

1999	28,9	91,8	63,7	32,2	11,1	2,2	0,1	30,9
2000	27,3	93,2	67,0	35,0	11,8	2,4	0,1	32,0
2001	27,3	93,1	70,2	38,0	12,9	2,4	0,1	33,1
2002	27,4	95,7	75,1	41,7	14,7	2,6	0,1	35,2
2003	27,6	95,1	78,3	44,1	16,0	2,7	0,1	36,5
2004	28,2	93,4	80,2	45,9	17,6	2,9	0,1	37,7

Источник: Демографический ежегодник России. 2005. – стр. 193.

### Задача 7. Анализ рождаемости в регионах России

Основываясь на данных таблицы “Рождаемость в регионах в 2001 г.” (Приложение 1, Таблица 4.):

1) Рассчитайте суммарные коэффициенты рождаемости и средний возраст матери при рождении ребенка по регионам России;

2) Укажите регионы с самым высоким и самым низким уровнем рождаемости, с самым высоким и самым низким средним возрастом матери при рождении ребенка;

3) Найдите регионы с наиболее заметной разницей в возрастных профилях рождаемости (соотношение уровней рождаемости в молодых и старших возрастах). В каких регионах самый высокий и самый низкий уровень рождаемости в возрастах 15 – 19 лет и 35 – 39 лет? Какими гипотезами можно объяснить разницу в рождаемости между регионами?

### Задача 8. Сравнение рождаемости в Москве и Дагестане

Основываясь на данных таблиц, проанализируйте изменения в рождаемости в Москве и Дагестане в 1959 – 2004 гг. Используйте известные Вам показатели, которые можно рассчитать на основе приведенных данных, а также графики.

Москва:

годы	Число родившихся на 1000 женщин данного возраста						
	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
1959	9,8	74,5	78,6	45,6	20,0	3,6	0,2
1969	20,7	98,9	84,3	48,2	17,9	3,0	0,2
1979	31,0	117,4	86,2	46,7	15,2	3,2	0,2
1989	32,9	117,4	83,8	45,5	17,5	3,3	0,1
1991	31,4	104,0	69,3	36,6	14,5	2,7	0,1
1992	26,5	91,5	61,1	29,6	11,7	2,5	0,1
1993	25,6	85,7	56,6	27,3	10,8	2,1	0,1

1994	28,9	91,7	64,4	29,7	11,0	2,1	0,2
1995	27,9	93,1	70,5	32,3	12,1	2,3	0,1
1996	24,1	90,6	73,8	34,1	12,7	2,6	0,1
1997	22,3	84,6	75,6	36,4	13,1	2,6	0,1
1998	19,7	82,7	76,8	38,5	13,8	2,7	0,2
1999	18	79,9	76,2	40,5	13,8	2,5	0,2
2000	17,6	84	82,9	45,6	16	3,3	0,1
2001							
2002	15,3	64,3	68,5	40,5	15,8	2,8	0,2
2003	15,7	63,2	73,5	44,6	18,0	3,3	0,2
2004	15,6	65,0	77,3	47,2	20,0	3,6	0,2

Дагестан:

годы	Число родившихся на 1000 женщин данного возраста						
	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
1959	27,5	188,3	258,5	208,5	156,1	78,5	26,6
1969	23,4	185,7	285,0	211,0	160,5	55,9	13,9
1979	24,7	229,7	229,8	101,8	92,4	41,0	7,2
1989	34,5	232,9	191,1	111,9	47,7	14,5	1,4
1991	38,4	237,9	174,7	100,2	40,1	11,1	1,4
1992	41,9	223,9	162,5	88,6	35,4	9,8	1,1
1993	40,8	207,2	149,6	78,3	31,4	7,9	1,4
1994	47,0	205,1	150,4	80,1	33,2	8,1	0,8
1995	38,1	196,8	151,9	86,2	35,1	8,1	1,1
1996	32,7	181,6	146	81,7	34	7,4	0,9
1997	31,4	168,8	140,6	82,2	35,4	7,4	0,7
1998	33,4	164,7	137	82,2	36,1	8,0	0,7
1999	27,7	154,8	127,3	75,9	32,6	7,9	0,7
2000	27,7	154,9	122,6	76,7	33,3	8	0,8
2001							
2002	19,5	124,8	114,1	71,3	31,8	7,5	0,7
2003	19,7	118,0	112,2	69,4	33,8	7,8	0,7
2004	20,6	114,9	109,4	67,4	31,5	7,6	0,5

Источник: Демографические ежегодники России.

#### Задача 9

На основе данных, приведенных в Таблице 7 Приложения 1, проанализируйте динамику рождений в России по брачному состоянию матери. Рассчитайте доли родившихся в зарегистрированном браке и вне брака, нанесите их на график. Что можно сказать об изменениях в этой области в послевоенный период?

#### Задача 10<sup>62</sup>

<sup>62</sup> Задача сделана на основе примера, приведенного в учебнике К. Вандескрика и показавшегося нам весьма удачным для демонстрации различий в показателях суммарной рождаемости календарного года и итоговой рождаемости поколения: см. русское издание Вандескрик К. Демографический анализ. – М.: Академический проект; Гаудеамус, 2005. – стр. 91

На основе данных, приведенных в таблице, рассчитайте суммарные коэффициенты рождаемости для календарных лет и итоговую рождаемость поколений 1944 – 1952 гг. Прокомментируйте разницу между динамикой суммарных коэффициентов и показателей итоговой рождаемости: чем она вызвана?

Поколения	годы													
	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
1940	0,30	0,15	0,00											
1941	0,30	0,30	0,15	0,00										
1942	0,60	0,30	0,30	0,15	0,00									
1943	0,45	0,60	0,30	0,30	0,15	0,00								
1944	0,00	0,45	0,60	0,30	0,30	0,15	0,00							
1945		0,00	0,45	0,60	0,30	0,30	0,15	0,00						
1946			0,00	0,45	0,60	0,30	0,30	0,15	0,00					
1947				0,00	0,45	0,60	0,30	0,30	0,15	0,00				
1948					0,00	0,50	0,80	0,40	0,10	0,00	0,00			
1949						0,00	0,50	0,80	0,40	0,10	0,00	0,00		
1950							0,00	0,50	0,80	0,40	0,10	0,00	0,00	
1951								0,00	0,50	0,80	0,40	0,10	0,00	0,00
1952									0,00	0,50	0,80	0,40	0,10	0,00
1953										0,00	0,50	0,80	0,40	0,10
1954											0,00	0,50	0,80	0,40
1955												0,00	0,50	0,80

*Задача 11. Сравнение уровней рождаемости в странах мира*

Известны возрастные коэффициенты рождаемости для пяти стран мира на конец 1990-х гг.:

страны	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
Российская Федерация	29,5	93,1	65,2	32,7	11,3	2,2	0,1
Швеция	11,7	87,2	144,3	108,5	42,6	7,2	0,4
Кения	110,2	257	240,8	197,6	154,4	70,2	49,7
США	62,8	114,4	116,9	78,8	31,6	5,3	0,4
Бразилия	73,4	146,3	129,3	81,2	41,5	14,2	2,5

- 1) сравните возрастные коэффициенты рождаемости;
- 2) рассчитайте средний возраст матери при рождении ребенка;
- 3) рассчитайте суммарный коэффициент рождаемости.

Какими факторами можно объяснить различия между моделями рождаемости, наблюдавшимися в этих странах?

*Задача 12*

Используя приведенные ниже данные переписи населения 1989 года,

1) рассчитайте среднее число рожденных детей у русских и татарок для соответствующих пятилетних когорт;

2) для каждого из поколений постройте относительное (в %) распределение рождений по их очередности. Как изменялись эти распределения по поколениям?

3) каков уровень инфертильности в поколениях женщин, находившихся в момент опроса в возрасте старше репродуктивного?

4) сравните полученные результаты для русских и татарок и прокомментируйте обнаруженные различия.

Указание: при расчете обратите внимание на численность женщин.

Национальность:	Возрастные группы:	Все женщины:	Женщины, не родившие ни одного ребенка:	Женщины, родившие 1 ребенка:	Женщины, родившие 2 ребенка:	Женщины, родившие 3 ребенка:	Женщины, родившие 4 ребенка:	Женщины, родившие 5 ребенка:	Женщины, родившие 6 ребенка:	Женщины, родившие 7 и более детей:	Женщины, не указавшие число рожденных детей:	Общее число рожденных детей:
Русские	15 и старше	50647108	10128443	13664713	16839507	5374521	1943685	1117543	551452	805525	221719	86888401
	от 15 до 19	3957813	3715252	218418	17246	1276	0	0	0	0	5621	256738
	от 20 до 24	3718644	1680360	1529887	439017	41176	5453	1081	700	564	20406	2566814
	от 25 до 29	4842729	832523	1940420	1730265	259257	42307	11837	3184	2890	20046	6449785
	от 30 до 34	5151080	517758	1547862	2419339	505678	92380	33524	11228	8603	14708	8575918
	от 35 до 39	4849864	387970	1393470	2326654	542210	107353	47774	16922	15620	11891	8567818
	от 40 до 44	3269314	267673	1030310	1505929	330359	67754	33420	11852	12426	9591	5644502
	от 45 до 49	3458483	275542	1008077	1563126	416037	98828	50517	17889	18071	10396	6286148
	от 50 до 54	4258276	359519	1178776	1843485	569314	156767	79396	28811	27369	14839	7994415
	от 55 до 59	3906607	397536	959845	1514795	610619	215095	107259	42105	41375	17978	7806115
	от 60 до 64	4333902	543210	1017513	1431927	707631	302488	159305	71479	77220	23129	9070836
от 65 до 69	2668227	396816	652320	730730	410872	204603	119906	60580	76097	16303	5753816	
70 и старше	6192326	750335	1179558	1308748	978098	649884	473060	286472	524707	41464	17872387	
Татары	15 и старше	2310142	501806	450323	657040	297548	136076	109321	59118	94261	4649	4898153
	от 15 до 19	173799	166829	6312	498	57	0	0	0	0	103	7479
	от 20 до 24	214316	113816	74624	23218	1897	142	61	54	34	470	128186
	от 25 до 29	287502	58409	99511	109320	16454	2356	579	145	206	522	382340
	от 30 до 34	270570	32346	60955	130411	36377	6630	2255	649	579	368	477091
	от 35 до 39	210035	18843	41240	98150	36784	8225	4358	1329	820	286	417114
	от 40 до 44	122428	9978	24432	53987	21872	5932	4000	1172	895	160	255977
	от 45 до 49	153145	11620	24721	56455	32639	11945	10019	3380	2136	230	370986
	от 50 до 54	189960	15457	27760	60534	39298	18839	16209	6391	5188	284	502743
	от 55 до 59	181282	18630	24774	43879	35737	22297	17716	8672	9154	423	523414
	от 60 до 64	177041	21789	24790	33948	30117	21417	17851	10892	15749	488	552435
от 65 до 69	84822	12115	13090	13660	12271	9375	8221	5666	10146	278	274666	

	70 и старше	244660	21929	28009	32850	33996	28906	28031	20761	49338	840	1004897
--	-------------	--------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-----	---------

**Задача 13**

На основе приведенных в таблице данных о возрастных коэффициентах рождаемости сравните эволюцию среднего возраста матери при рождении ребенка, возрастного профиля рождаемости и суммарного коэффициента рождаемости в ФРГ и ГДР до их объединения 3 октября 1990 г.

Возрастные коэффициенты рождаемости (на 1000 женщин данного возраста):

Федеративная Республика Германия							
год	15 - 19	20 - 24	25 - 29	30 - 34	35 - 39	40 - 44	45 - 49
1960	24,6	125,7	156,7	100,9	50,6	16,8	1,0
1965	31,9	138,5	142,5	104,2	47,6	13,9	1,4
1970	35,8	129,9	108,2	77,2	39,7	11,0	0,8
1975	21,1	87,8	99,2	52,2	21,9	6,6	0,5
1980	15,2	81,5	106,5	64,6	18,3	4,1	0,3
1985	8,6	58,0	102,3	64,0	22,7	3,3	0,2
Германская Демократическая Республика							
1960	36,8	166,7	138,9	77,7	37,9	10,9	0,7
1965	48,3	184,0	138,6	78,9	36,2	10,2	0,6
1970	42,9	185,4	115,5	61,1	28,0	5,1	0,3
1975	34,1	144,2	84,1	31,9	11,2	2,9	0,2
1980	38,0	183,4	114,0	40,0	11,0	2,1	0,2
1985	29,2	157,7	108,7	38,7	11,2	1,7	0,1

Источник: *Evolution Démographique récente en Europe et en Amérique du Nord. 1992.* – pp. 136, 142.

**Задача 14**

В таблице приведены данные о женщинах, закончивших беременность. Рассчитайте доли аборт, преждевременных родов и родов в срок, приходящихся на 1000 беременностей. Прокомментируйте динамику этих показателей в России во второй половине 1990-х гг.

	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Численность женщин, закончивших беременность, всего (тыс. чел.)	1292,8	1228,6	1188,1	1215,1	1150,6	11155,9

В том числе:						
- родами в срок	1178,0	1117,6	1082,9	1108,7	1045,9	1053,4
- преждевременными родами	50,5	48,8	45,1	46,0	46,1	46,9
- абортами (по учреждениям системы Минздрава РФ)	64,3	62,2	60,1	60,4	58,1	55,6

Источник: *Здравоохранение в России: Стат. сб. / Госкомстат России. – М., 2001. – с. 129.*

#### Задача 15

В таблице приведены возрастные коэффициенты абортс (на 1000 женщин). Рассчитайте суммарные коэффициенты абортс (произведенных в учреждениях Минздрава России) и проанализируйте их динамику во второй половине 1990-е гг. Прокомментируйте изменения в возрастном распределении абортс. Сравните возрастные коэффициенты абортс и возрастные коэффициенты рождаемости в России в те же годы, прокомментируйте разницу. Сравните динамику суммарных коэффициентов рождаемости и суммарных коэффициентов абортс, прокомментируйте.

Год	15 – 19	20 – 24	25 – 29	30 – 34	35 – 39	40 – 44	45 – 49
1996	47,0	126,0	128,6	87,2	55,9	20,0	2,7
1997	43,8	117,8	116,6	85,0	52,9	20,7	2,5
1998	40,5	109,9	110,5	83,2	51,4	20,4	2,3
1999	35,0	101,7	102,9	80,4	48,8	19,2	2,1
2000	33,4	96,6	97,8	77,6	46,4	18,0	1,9
2001	32,1	91,5	91,2	73,8	44,8	17,1	1,7

Источник: *Население России 2001. Девятый ежегодный демографический доклад / Под ред. А.Г. Вишневого. – М., 2002. – с. 58.*

#### Задача 16

На основе данных Мосгорстата о возрастной структуре женщин репродуктивных возрастов и распределении родившихся по возрасту матери в Москве в 1998 году, рассчитайте:

- 1) возрастные коэффициенты рождаемости для всех рождений;
- 2) возрастные коэффициенты рождаемости по очередности рождений;
- 3) суммарные коэффициенты рождаемости для всех рождений и с учетом очередности;

- 4) средний возраст матери при рождении 1-го, 2-го, 3-го, 4-го ребенка и всех детей без очередности рождения;
- 5) вероятности увеличения семьи для каждой очередности рождения.

Возраст	Численности женщин на начало года (тыс. чел.)		Родившиеся по порядку рождения:					
	1998	1999	первые	вторые	третьи	четвертые	пятые и более	неизв.
15-19	277,2	286,8	5369	227	7	-	-	3
20-24	272,5	276,3	19144	3187	219	23	2	19
25-29	273,7	278,6	12796	7355	792	109	48	13
30-34	303,1	289,4	4191	5774	1079	209	91	4
35-39	403,9	393,2	1612	2524	979	228	150	5
40-44	392,9	403,1	298	401	242	68	64	1
45-49	366,1	370,5	10	21	14	3	6	2

#### Задача 17

На основе результатов, полученных в Задаче 16, а также данных Мосгорстата о распределении рождений по брачному состоянию матери рассчитайте возрастные коэффициенты брачной и внебрачной рождаемости и проанализируйте особенности возрастного распределения рождений вне брака.

Число рождений по возрасту и брачному состоянию матери в 1998 году в Москве:

Возраст	Все рождения	В том числе у матерей:		
		состоявших в зарегистрированном браке	не состоявших в зарегистрированном браке (по совместному заявлению родителей)	не состоявших в зарегистрированном браке (по заявлению матери)
15-19	5606	3558	856	1192
20-24	22594	17446	2903	2245
25-29	21113	16424	3065	1624
30-34	11348	8487	1791	1070
35-39	5498	3915	905	678
40-44	1074	721	181	172
45-49	56	40	10	6

#### Задача 18

Используя данные таблицы, рассчитайте коэффициенты суммарной рождаемости и средний возраст матери при рождении ребенка. Сравните рождаемость в некоторых странах СНГ в 2003 году.

Возрастные коэффициенты рождаемости (родившиеся живыми на 1000 женщин данной возрастной группы) в 2003 году:

	15 - 19	20 - 24	25 - 29	30 - 34	35 - 39	40 - 44	45 - 49	15 - 49
Азербайджан	27,7	126,4	95,3	44,9	18,7	4,9	0,4	46,6
Армения	29,3	126,6	71,5	29,6	10,2	2,4	0,2	39,4
Беларусь	23,3	93,3	73,1	37,0	12,2	2,2	0,1	33,1
Казахстан	26,9	136,6	120,0	76,2	38,4	8,0	0,5	58,95
Кыргызстан	28,5	164,8	144,5	95,8	51,0	15,5	2,5	76,9
Молдова	29,2	89,7	67,6	40,7	13,8	2,6	0,1	35,8
Россия	27,6	95,1	78,3	44,1	16,0	2,7	0,1	36,5
Украина	29,0	92,3	67,1	33,0	10,9	2,0	0,1	32,7

#### Задача 19

На основе данных таблицы рассчитайте и сравните суммарный коэффициент абортов в России и США в 2000 году:

Возрастные коэффициенты абортов (на 1000 женщин):

Возрастные группы	Россия <sup>1)</sup>	США <sup>2)</sup>
15 - 19	33,4	23,9
20 - 24	96,6	46,4
25 - 29	97,8	31,6
30 - 34	77,6	18,6
35 - 39	46,4	9,7
40 - 44	18,0	3,3
45 - 49	1,9	-

Источники: 1) *Население России 2001. Девятый ежегодный демографический доклад* /Под ред. А.Г. Вишневого. – М.: Книжный дом «Университет», 2002. – стр. 58; 2) *U.S. Census Bureau, Statistical abstracts of the United States: 2006.*

#### Задача 20

Найдите параметры модели Коула-Трассела для брачной рождаемости в Кыргызстане в 1998-1999 гг. Сравните полученные результаты с результатами

Примера 1.

Возраст	$n(a)$	$v(a)$	$r(a)$
20-24	0,46	0	0,240
25-29	0,431	-0,279	0,163
30-34	0,395	-0,667	0,107
35-39	0,322	-1,042	0,053
40-44	0,167	-1,414	0,015

**Задача 21**

Выполните расчеты параметров модели Коула–Трассела для Кыргызстана в 1988-89 и 1998-1999 гг. по упрощенному методу (2). Сравните полученные результаты с результатами *Примера 1* и *Задачи 20*. Можно ли результаты упрощенного метода считать удовлетворительными?

**РЕШЕНИЯ***Решение Задачи 1*

1) приходится на 1 брак:

рождения всех порядков:  $N=19459/10000=1.9459$

рождения первого порядка:  $N(1)=7876/10000=0.7876$

и.т.д.

$1.95=0,79+0,50+0,29+0,17+0,20$

2) для расчета среднего возраста брака используем формулу:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{15}^{49} (x + \frac{n}{2}) \cdot f_x}{\sum_{15}^{49} f_x}$$

рождения всех порядков:  $N=95834/19459=4,925$

рождения первого порядка:  $N(1)=15624/7876=1,983$

рождения второго порядка:  $N(2)=23748/4960=4,787$

рождения третьего порядка:  $N(3)=20085/2889=6,952$

рождения четвертого порядка:  $N(4)=14473/1697=8,528$

рождения пятого порядка и выше:  $N(5+)=21902/2037=1,752$

$N=(N(1) i(1)+ N(2) i(2)+...)/N$

3) Таблица рождаемости для первых рождений:

Длительность брака	Бездетные семьи	Первые рождения	Вероятность рождения первенца
0	10000	3485	0,3485
1	6515	2078	0,3190
2	4437	813	0,1832
3	3624	460	0,1269
4	3164	3007	0,0970
5	2857	208	0,0728

*Решение Задачи 3*

Воспользуемся формулами для преобразования коэффициентов в вероятности:

$$q_i = 2t_i / (2 + t_i) \quad (1)$$

$$q_i = 1 - \exp(-t_i) \quad (2)$$

В результате получим:

длительность брака	истинная вероятность	вероятность по формуле (1)	вероятность по формуле (2)
0	0,3485	0.3485	0.3443
1	0,3190	0.3189	0.3157
2	0,1832	0.1832	0.1827
3	0,1269	0.1269	0.1267
4	0,0970	0.0970	0.0970

Поскольку при расчете человеко-лет в коэффициентах мы принимали гипотезу линейности, истинная вероятность равна вероятности по формуле (1).



## РАЗДЕЛ 6. АНАЛИЗ БРАЧНОСТИ

Интерес к изучению брачности обусловлен в первую очередь тем, что этот процесс, наряду с рождаемостью, разводимостью и овдовением, определяет формирование семьи в современном обществе. *Брак* (фактический или юридически зарегистрированный) – исходный момент формирования семьи. «Брак – исторически обусловленная, санкционируемая и регулируемая обществом форма отношений между мужчиной и женщиной, определяющая их права и обязанности по отношению друг к другу и к детям»<sup>63</sup>. Различают несколько форм брака: гражданский брак (зарегистрированный юридически светскими органами власти), церковный брак (заключенный на основе церковного обряда), фактический (консенсуальный) брак – незарегистрированный юридически. Порядок заключения брака, условия его заключения и формы меняются от страны к стране и регулируются специальным законодательством.

*Брачность* – процесс образования брачных пар в населении. При этом учитываются как первые, так и повторные браки. Процессы брачности, разводимости, овдовения обуславливают формирование *брачной структуры* населения. Изучение брачности в последние десятилетия приобретает самостоятельный интерес, в значительной степени связанный с нарастанием изменений в институте брака.

### 6.1. МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕНДЕНЦИЙ БРАЧНОСТИ. ТИПЫ БРАЧНОГО ПОВЕДЕНИЯ

Эволюция брачного поведения и брачности тесно связана с развитием семьи и должна рассматриваться в контексте изменения семейных отношений. Демографов при изучении семьи обычно и вполне закономерно интересуют те аспекты, которые непосредственно связаны с рождаемостью и воспроизводством населения. При этом брачность традиционно исследовалась лишь в той степени, в которой она является фактором рождаемости. Однако по мере развития брачных отношений процесс брачности получает относительно самостоятельное движение, не столь явно связанное с рождаемостью, как

---

<sup>63</sup> Демографический энциклопедический словарь, с. 45

раньше. Одновременно в этой сфере отношений возникают новые явления и формы, которые нуждаются в объяснении и определении их места в системе брачно-семейных отношений. Речь идет прежде всего о таких тенденциях, как увеличение числа разводов, рост доли фактических браков и доли одиноких в населении.

Один из подходов в изучении закономерностей брачности заключается в анализе смены ее исторических типов. А.Г. Волков считает, что исторический тип брачности с демографической точки зрения характеризуется временем вступления в брак основной массы каждого поколения и распространенностью окончательного безбрачия, т.е. долей тех, кто не вступает в брак на протяжении всей жизни<sup>64</sup>. Определение типа брачности в более широком понимании должно содержать также характеристику уровня разводимости. Теория исторических типов брачности позволяет изучать эволюцию брачности в контексте теории демографического перехода, наряду со сменой исторических типов рождаемости и смертности. Теория исторических типов брачности в ее современном виде связана с именем американского ученого Дж. Хаджнала<sup>65</sup>. К настоящему времени в эволюции брачности можно выделить два периода; первый был описан Дж. Хаджналом, а второй относится ко второй половине XX века и требует особого изучения.

Периоды в эволюции брачности различаются, в первую очередь, степенью связи брачности и рождаемости. Прежде чем перейти к анализу каждого периода, введем несколько понятий, характеризующих отдельные виды демографического поведения:

Брачное поведение – поведение в связи с заключением и прекращением брака (характеризуется возрастом вступления в 1-й брак, частотой разводов и повторных браков, уровнем окончательного безбрачия).

Половое поведение – поведение, характеризующееся отношением к добрачным и внебрачным связям, а также нормами полового поведения в браке.

---

<sup>64</sup> Волков А.Г. Семья – объект демографии. – М.: Мысль, 1986. – с. 108

<sup>65</sup> Хаджнал Дж. Европейский тип брачности // Брачность, рождаемость, семья за 3 века. – М.: Статистика, 1979.

Репродуктивное поведение – поведение, имеющее непосредственное отношение к зачатию, вынашиванию и рождению ребенка (характеризуется, помимо показателей рождаемости, отношением к использованию искусственных абортов и контрацепции для планирования рождений).

Два отмеченных периода в развитии брачности различаются степенью взаимосвязи этих видов демографического поведения.

**Первый период**, по мнению Хаджнала, включал два типа брачности: традиционный и «европейский». Традиционный тип брачности просуществовал в Европе вплоть до середины XVIII века и характеризовался низким уровнем вступления в брак и низкой долей никогда не вступавших в брак на протяжении жизни. Так называемый «европейский» тип брачности, пришедший на смену традиционному, характеризовался значительно более поздним вступлением в брак и высокой долей окончательного безбрачия. Он просуществовал два столетия, вплоть до 1940-х гг. Становление в XVIII веке «европейского» типа брачности сопровождалось изменением брачных норм и обычаев. Так, Хаджнал отмечал, что незамужняя жизнь взрослых женщин воспринималась как нормальная, хотя, возможно, и не столь часто встречавшаяся альтернатива браку. Таким образом, в XVIII в. произошел первый переход в брачности, или изменение брачного поведения, сопровождавшееся также изменением демографических характеристик этого процесса. А.Г. Вишневский связывает этот переход в брачности с изменениями в регулировании рождаемости, полагая, что традиционный тип брачности соответствовал традиционному типу рождаемости и являл собой способ социального контроля над рождаемостью с целью обеспечения ее высокого уровня. Переход к европейскому типу брачности «представляет собой стихийную попытку преодолеть кризис старой системы демографического регулирования, не устраняя самой этой системы»<sup>66</sup>. Новые нормы брачного поведения, соответствовавшие «европейскому» типу, предназначались для сокращения уровня рождаемости в соответствии со снижением смертности. Поскольку регулирование рождаемости через брачность по сути ничего не меняло в самом репродуктивном поведении,

---

<sup>66</sup> Вишневский А.Г. Демографическая революция. – М.: Статистика, 1976. – с. 187

смена типов брачности проходила в рамках одного, традиционного типа рождаемости, три типа демографического поведения (брачное, половое, репродуктивное) оставались тесно связаны между собой. Таким образом, переход в брачности, будучи одним из составных элементов демографического перехода, тем не менее не совпадал с ним. Институту брака отводилась роль демографического регулятора рождаемости. Причем желаемый эффект (ограничение рождаемости) достигался двумя путями: повышением возраста вступления в брак (в среднем до 25 – 30 лет у женщин, что на 10 лет выше традиционных норм), а также увеличением частоты окончательного безбрачия, которое в ряде стран (Исландия, Норвегия, Португалия) достигало 20 – 30% среди женского населения<sup>67</sup>.

**Второй период** в эволюции брачности (переход от «европейского» к «послевоенному» типу брачности), начавшийся в 1940-е годы, также был тесно связан с рождаемостью. Он совпал с возникновением нового исторического типа рождаемости и, по сути, был вызван к жизни появлением этого нового типа. Новые тенденции в брачном поведении были связаны с исчезновением «необходимости, вступая в брак, учитывать также и репродуктивные соображения»<sup>68</sup>. Таким образом, первые два типа брачности соответствовали традиционному типу рождаемости, третий тип связан со становлением современного типа рождаемости. Институт брака перестает рассматриваться как средство регулирования рождаемости. Если послевоенный период характеризовался снижением возраста вступления в брак и повышением интенсивности брачности, то уже в начале 1970-х гг. в большинстве европейских стран наметилось новое изменение в тенденциях. Качественное отличие этих изменений от первого перехода (к европейскому типу) и второго (после второй мировой войны) заключается в том, что новый скачок не был связан с изменениями в рождаемости; тип рождаемости и тип демографического контроля остались прежними.

---

<sup>67</sup> Chesnais J.-P., Lui Chang Hong *Mariage et regulation démographique: le cas de la Chine* // *Population*, 1986, n 6, p. 979-1004.

<sup>68</sup> Вишневский А.Г., цит. соч., с. 159.

С начала 1970-х гг. практически во всех европейских странах наблюдается снижение значений суммарного коэффициента первых браков, что связано с влиянием по крайней мере трех факторов: с уменьшением доли регистрируемых браков и откладыванием вступления в брак на более поздние возраста, нельзя также не принимать во внимание той части населения, которая вообще не вступает в брак, ни в фактический, ни в юридический. Другим показателем, характеризующим изменения в брачном поведении, является возраст вступления в первый брак, или сдвиги в календаре брачности. Если в 1960-е гг. отмечался рост брачности в молодых возрастах (так называемое «омоложение» брака), то в последующие десятилетия ситуация изменилась – брак начал «стареть». Этот переход, ведущий в конечном счете к смещению календаря брачности в более поздние возраста и к развитию фактических браков, связан не столько с демографическими, сколько с целым комплексом социальных причин. Его отличие от всех предыдущих переходов состоит, во-первых, в отсутствии связи с рождаемостью, и, во-вторых, в том, что на смену единственному для каждого населения типу брачности приходит множество типов брачности.

Эволюцию типов брачности кратко можно представить на следующей схеме:

<p><b>I период</b> в развитии брачности: брачность выступает социальным регулятором рождаемости; три вида демографического поведения тесно связаны</p>	<p>II период в развитии брачности: на смену брачности как регулятору рождаемости на уровне общества приходит ее внутрисемейное регулирование (контрацепция, искусственные аборты); три вида демографического поведения постепенно теряют связь между собой</p>
<p><b>(1) Традиционный тип брачности</b> – обеспечивал высокий уровень рождаемости посредством</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- низкого возраста вступления в первый брак</li> <li>- низкой доли женщин, никогда не состоявших в браке</li> </ul>	<p><b>(3) Послевоенный тип брачности</b> –</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- снижение возраста вступления в первый брак</li> <li>- низкая доля никогда не состоявших в браке</li> </ul>
<p><b>(2) «Европейский» тип брачности</b> – обеспечивал снижение рождаемости посредством сокращения репродуктивного периода из-за</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- высокого возраста вступления в</li> </ul>	<p><b>(4) «Современный» тип брачности</b> –</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- повышение возраста вступления в первый брак</li> <li>- снижение суммарного коэффициента первых браков на фоне роста доли незарегистрированных браков</li> </ul>

первый брак - высокой доли женщин, никогда не вступавших в брак	- рост разводимости и распространение повторных браков
--	--

## **6.2. ОСОБЕННОСТИ РОССИЙСКИХ ИСТОЧНИКОВ ДАННЫХ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ БРАЧНОСТИ**

Информацию о брачном состоянии населения можно получить из материалов переписей населения, а также из данных текущего учета брачности.

Специфика вопроса о брачном состоянии в советских и российских переписях такова, что на его основе практически невозможно анализировать динамику брачной структуры вплоть до переписи населения 1979 года, когда после длительного перерыва (более 50 лет!) был использован расширенный подсказ к вопросу о состоянии в браке: никогда не состоял в браке, состоит в браке, вдовый, разведенный или разошедшийся. В предыдущих переписях существовала лишь возможность указать, состоит ли опрашиваемый в браке или нет. В микропереписи населения 1994 г., а также во Всероссийской переписи населения 2002 г. подсказ в ответе на данный вопрос дан еще шире – в него включен вариант ответа о состоянии в фактическом браке. Таким образом, положено начало сбора статистических материалов об этом малоизученном феномене.

Информацию о процессах брачности и разводимости можно получить на основе разработки материалов первичной регистрации браков и разводов (Актов записи гражданского состояния). К сожалению, традиционно в разработку и публикацию попадает лишь незначительная часть информации, содержащейся в акте регистрации брака или развода. Как правило, это возраст супругов, очередность брака, а для распавшихся браков – указание на число общих детей. В то же время сохраняется возможность более детальной разработки материалов регистрации с помощью специальных исследований.

Программа регистрации демографических событий определяется Законом об Актах записи гражданского состояния. Согласно новому Закону, вступившему в действие в 1997 г., место регистрации брака не привязано более к месту жительства одного из супругов или их родителей и производится любым органом ЗАГС по выбору лиц, вступающих в брак. Сравнительный анализ программ регистрации брака до 1997 и после 1997 года показывает, из

Акта о заключении брака исключены сведения о предыдущем брачном статусе вступающего в брак, что делает невозможным изучение распространенности повторных браков, а также сведения об общих детях до 18 лет, позволявшие косвенно оценивать распространенность фактических браков и добрачных зачатий. Кроме этого, исключены все социальные характеристики супругов (уровень образования, сфера занятости, место работы и пр.), что делает практически невозможным анализ брачных предпочтений и социальной дифференциации брачности. Не указывается также место жительства, поэтому практически невозможно изучать так называемую «брачную миграцию».

Регистрация расторжения брака производится по месту жительства одного из супругов или по месту государственной регистрации заключения брака. С 1997 г. из Акта о расторжении брака исключены сведения о числе общих детей, не достигших 18 лет, в результате чего невозможно оценить численность детей, еже годно оказывающихся в неполных семьях (остающихся с одним из родителей) в результате развода. Также невозможно оценить длительность брака в зависимости от его очередности (первый, повторный), так как эта информация не собирается. Как и в акте о регистрации брака, отсутствует информация о социальных характеристиках супругов и месте их жительства.

Все эти обстоятельства необходимо принимать во внимание при изучении брачности в России, поскольку они накладывают ограничения на наличие статистических данных.

### **6.3. ПОКАЗАТЕЛИ БРАЧНОСТИ**

Процесс брачности описывается с помощью характеристик его интенсивности (коэффициенты и вероятности вступления в брак), календаря (среднего возраста вступления в брак) и брачной структуры. Число вступающих в брак и состоящих в браке существенно зависит от того, насколько интенсивно заключались браки в прошлые годы, и от того, какова численность бракоспособного населения в данном году. Можно изучать брачность как реальных, так и условных поколений.

### 6.3.1. Характеристики брачной структуры

Брачная структура характеризует распределение населения по состоянию в браке. Основная задача анализа брачной структуры – определение уровня брачности, или, другими словами, долей состоящих в браке в бракоспособных возрастах. Эти доли подвержены влиянию многих структурных факторов, в частности, они зависят от соотношения численностей мужчин и женщин бракоспособного возраста, не состоящих в браке. В более широком контексте можно говорить, что на уровень брачности населения влияет прошлое и нынешнее состояние «брачного рынка»<sup>69</sup>. При анализе брачной структуры выделяют следующие категории населения:

- состоящие в браке, в том числе состоящие в фактическом браке;
- никогда не состоявшие в браке;
- разведенные, разошедшиеся;
- вдовы.

Среди состоящих в браке выделяют также состоящих в первом и повторных браках.

### 6.3.2. Характеристики интенсивности брачности в календарном году и в реальном поколении

Интенсивность брачности в реальных или условных поколениях может характеризоваться при помощи системы коэффициентов брачности, а также при помощи таблиц брачности.

**Общий коэффициент брачности** можно рассчитать по формуле:

$$b = \frac{B}{P \cdot T} \cdot 1000,$$

где  $B$  – число браков, зарегистрированных в течение года,  $\bar{P}$  – средняя численность населения,  $b$  – общий коэффициент брачности.

**Специальный коэффициент брачности** представляет собой среднее число зарегистрированных браков, приходящееся на 1000 человек бракоспособного населения (населения, достигшего брачного возраста и не состоящего в браке):

<sup>69</sup> Понятие «брачного рынка» было введено в научный оборот французским демографом Л. Анри и означает «систему соотношений численностей различных групп бракоспособного населения». См. подробнее: Ильина И.П. «Брачный рынок» // Демографический энциклопедический словарь. Гл. ред. Д.И. Валентей. – М., 1985. – с. 49

$$b_{\text{спец}} = \frac{B}{P_{\text{бракосп}} \cdot T} \cdot 1000$$

Специальный коэффициент брачности, как и возрастные коэффициенты, можно рассчитывать отдельно для мужчин и женщин, для первых и повторных браков.

**Возрастной коэффициент брачности** женщин показывает среднее число браков в течение прожитого года у женщин в возрасте  $x$ :

$$b_x = \frac{B_x}{P_x^f \cdot T} \cdot 1000.$$

**Суммарный коэффициент первых браков** показывает, сколько в среднем первых браков пришлось на одного члена реальной когорты или сколько в среднем первых браков пришлось на одного члена условной когорты при условии сохранения повозрастных показателей брачности, существовавших в данном календарном году, на протяжении всего срока жизни данной условной когорты. Суммарные коэффициенты рассчитываются как сумма повозрастных коэффициентов с учетом длины возрастного интервала. Суммарный коэффициент брачности рассчитывается следующим образом:  $b_{\text{сумм}} = \sum_{x=15}^{49} n \cdot b_x$ , где  $n$  – длина возрастного интервала. В случае омоложения брачности суммарный коэффициент первых браков, рассчитанный для условного поколения, может превысить единицу.

На рис. 6.1 приведены изменения чисел вступивших в брак в Москве за столетний период, с 1885 по 1994 год. Рост числа браков и разводов в первую очередь объясняется ростом численности населения Москвы за этот период. Но существенную роль играли и демографические факторы. Так, рост числа браков в 1920-е гг. был связан с выдачей приданого новобрачным, а также с введением так называемого «пайка красной звезды» женам красноармейцев – значительное число браков заключалось ради материальной выгоды. Рост числа разводов в начале 1960-х гг. был связан с упрощением процедуры развода – в эти годы формально регистрировались уже распавшиеся в прошлом браки. Таким образом, динамика брачности и разводимости, помимо демографических факторов (численность бракоспособного населения,

возрастная структура и др.) зависит от изменений в законодательстве, в социально-экономических условиях жизни.

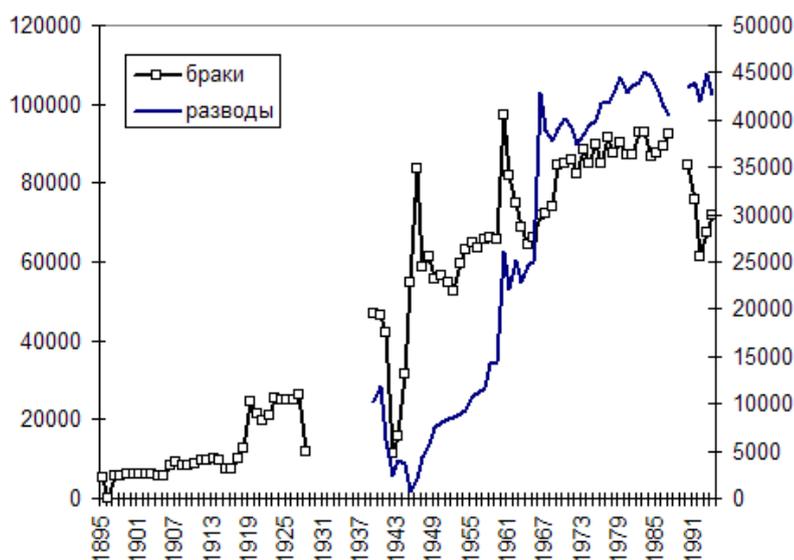


Рис. 6.1. Браки и разводы в Москве. 1885 – 1994 гг.

Второй пример связан с особенностями расчета и анализа суммарных коэффициентов вступления в первый брак. В ряде стран, особенно в 1960 – 1970-е гг. суммарный коэффициент первых браков превысил 1000 браков на 1000 человек. В реальных поколениях такая величина показателя в принципе невозможна – нельзя вступить в первый брак более одного раза за всю жизнь. В условных поколениях, благодаря особенностям формирования условной когорты, это возможно. И показатель будет тем больше 1000, чем ниже возраст вступления в брак. Иными словами, при омоложении брачности суммарный коэффициент первых браков может превысить 1000 браков на 1000 человек, то есть этот показатель зависит не только от уровня брачности в реальных поколениях, но и от изменений календаря брачности в этих поколениях.

При анализе брачности, как и при анализе других демографических процессов, используются таблицы брачности. **Таблицы брачности** делятся на общие и специальные. В общих таблицах брачность рассматривается независимо от брачного состояния населения. Основным показателем такой

таблицы служит возрастной коэффициент брачности (который можно разложить на коэффициент первых и повторных браков). Итогом таблицы служат суммарные коэффициенты брачности. Специальные таблицы брачности строятся для никогда не состоявших в браке по принципу таблицы единственного выбытия. В чистых таблицах брачности рассматривается сокращение исходной численности никогда не состоявших в браке только под влиянием вступления в брак, в комбинированных таблицах – еще и под влиянием смертности (или миграции). Основные показатели чистой таблицы брачности:

$x$  – точный возраст, лет

$S_x$  – число не вступивших в брак к точному возрасту  $x$ ;  $S_{x+1} = S_x - B_{x,x+1}$

$b_x$  – вероятность вступления в брак в возрастном интервале  $(x, x+1)$

$B_{x,x+1} = S_x * b_x$  – число вступивших в брак в возрастном интервале  $(x, x+1)$

$\sum_x^{50} B_x$  – число вступивших в брак в возрасте  $x$  лет и старше

$Q_x$  – вероятность вступления в брак в возрасте  $x$  лет и старше

$\bar{x}$  – средний возраст вступления в брак для вступивших в брак в возрасте  $x$  и старше

Помимо таблиц брачности рассчитываются также таблицы разводимости, овдовения или прекращения брака<sup>70</sup>.

Среди показателей разводимости отметим довольно часто используемое отношение числа разводов текущего года к числу браков того же года. К сожалению, этот показатель часто трактуют поверхностно, как долю браков, распадающихся вследствие развода. Если присмотреться к структуре этого показателя, мы увидим, что его числитель в незначительной степени связан со знаменателем: в знаменателе – браки, зарегистрированные в данном году, а в числителе – разводы, зарегистрированные в данном году. В то же время распавшиеся браки данного года могут относиться как к брачной когорте данного года, так и (что более вероятно) к брачным когортам прошлых лет.

Помимо традиционных демографических показателей, при анализе брачности интересно также использовать и некоторые другие статистические

<sup>70</sup> См., например: Демографический энциклопедический словарь. Сс. 451 – 458.

характеристики, в частности, показатели **сезонности брачности**, т.е. колебания чисел браков по месяцам года. На рис. 6.2 видно, что в мае число браков в послевоенный период было ниже среднегодового, а в августе – выше. В конце XIX – начале XX вв. колебания чисел браков определялись постами (большая часть населения Москвы в те годы была православной, соблюдала посты, а венчания во время постов не проводились). Несмотря на исчезновение ряда факторов, обуславливавших в начале XX века сезонность брачности, сезонные колебания сохраняются и в настоящее время, изменились лишь месяцы пиков и спадов (рис. 6.3). В 1990-е гг. пики приходились на декабрь – начало января, а также на июль и август – месяцы отпусков и каникул, основной спад отмечался в мае, видимо, согласуясь с народной поговоркой «жениться в мае – всю жизнь маяться».

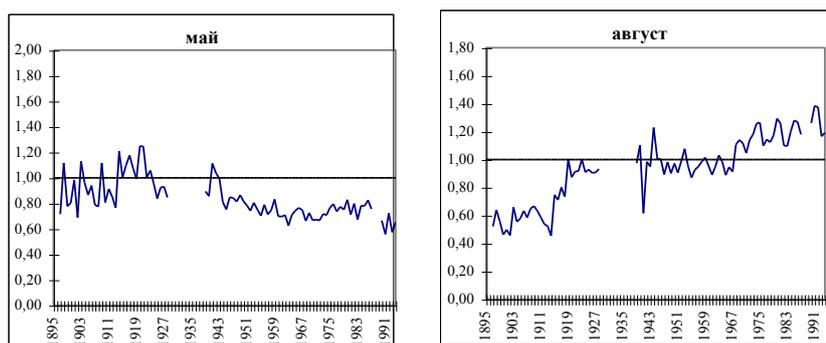


Рис. 6.2. Отклонение от среднегодового значения чисел браков в августе и в мае, Москва, 1895 – 1994 гг.

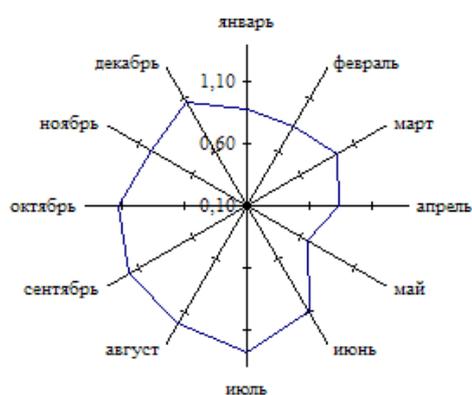


Рис. 6.3. Сезонные отклонения месячных чисел браков от среднегодовых значений, Москва, 1994 г.

### 6.3.3. Характеристики календаря брачности

Календарь брачности характеризуется распределением браков в зависимости от времени, истекшего с момента формирования данной когорты и характеризуется средним возрастом вступления в брак, который рассчитывается как средняя из возрастов вступивших в брак в определенном году или в реальном поколении, взвешенная возрастными коэффициентами брачности. При этом принимают гипотезу, что средний возраст вступления в брак в возрастном интервале приходится на середину возрастного интервала:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{15}^{49} (x + \frac{n}{2}) \cdot {}_n b_x}{\sum_{15}^{49} {}_n b_x},$$

где  $\bar{x}$  – средний возраст вступления в брак;  $x$  – начало возрастного интервала, в котором зарегистрирован брак;  $n$  – длина возрастного интервала, в котором зарегистрирован брак;  $(x + n/2)$  – середина возрастного интервала или средний возраст вступления в брак в данном интервале;  ${}_n b_x$  – возрастной показатель интенсивности вступления в брак в возрасте  $x$  (возрастной коэффициент брачности, среднее число браков, приходящееся на 1000 женщин данного возраста).

Календарь брачности отражает средний возраст вступления в брак. Минимальный возраст вступления в брак определяется законодательством о

браке (в России – 18 лет, по специальному разрешению – 16 лет). В качестве верхней границы возраста вступления в брак в демографических исследованиях обычно принимают 50 лет, поскольку браки, заключенные после этого возраста, практически не будут оказывать влияния на воспроизводство населения.

На основе данных переписи населения можно рассчитать так называемый средний расчетный возраст вступления в первый брак (SMAM),

впервые предложенный Дж. Хаджналом:  $SMAM = 15 + \frac{\sum_{15}^{49} C_x - 35C_{50}}{1 - C_{50}}$ , где  $C_x$  –

доли никогда не состоявших в браке в отдельных возрастах (можно рассчитать по материалам переписи населения),  $C_{50}$  – доля никогда не вступавших в брак в течение жизни или доля окончательного безбрачия.

Принцип расчета этого показателя основан на определении числа человеко-лет, прожитых до вступления в брак теми, кто вступил в брак в течение жизни. Если принять, что вступление в брак начинается с возраста 15 лет, то дробь в данном показателе дает возможность рассчитать среднее число лет, прожитых данной когортой до вступления в брак: в числителе – число человеко-лет, прожитых всеми членами когорты до вступления в брак, в знаменателе – доля вступивших в брак из членов данной когорты.

При анализе данного показателя следует помнить, что он не зависит от влияния возрастной структуры, но при его расчете предполагается, что возрастные уровни брачности на протяжении жизни данной когорты останутся такими же, как в том году, для которого рассчитан данный показатель.

#### **6.4. СУММАРНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ БРАЧНОСТИ И ИТОГОВАЯ БРАЧНОСТЬ РЕАЛЬНОГО ПОКОЛЕНИЯ<sup>71</sup>**

Как и при анализе рождаемости, при анализе брачности в условных поколениях встает вопрос о том, насколько полученные тенденции можно считать тенденциями для реальных поколений. Для ответа на этот вопрос можно рассчитать так называемые элементы календаря брачности,

<sup>71</sup> Подробнее см., например: Pressat R. L'Analyse démographique. Concepts, Méthodes, Résultats. – Paris : PUF, – 1973. – pp. 118 – 124.

отражающие распределение событий (браков) по времени существования когорты.

Рассмотрим формулу  $\sum_{x=0}^w \alpha_{x,i} = 1$ , где  $\alpha_{x,i}$  – доля событий, которые в когорте  $i$  наступили в возрасте  $x$ . Обозначив через  $p_i$  коэффициент итоговой брачности в когорте  $i$ , получим  $\alpha_{x,i} * p_i$  – число браков, приходящееся на одного представителя когорты  $i$  в возрасте  $x$  лет, то есть возрастной коэффициент брачности. В реальных поколениях  $\sum_{x=0}^w \alpha_{x,i} p_i = p_i$ . В условных поколениях сумма по  $i$ , то есть  $\sum_{i=0}^w \alpha_{x,i} p_i = S$  представляет собой суммарный коэффициент брачности данного календарного года. Из формулы его расчета хорошо видно, что он представляет собой функцию от календаря брачности разных когорт ( $\alpha_{x,i}$ ) и итоговых интенсивностей брачности разных когорт  $p_i$ . Следовательно, суммарный коэффициент брачности, рассчитанный для календарного года, будет в точности отражать итоговую брачность реальных поколений только при условии, что календарь и интенсивность брачности в реальных когортах не меняются и остаются одинаковыми для всех когорт. В ином случае значение суммарного коэффициента брачности находится между крайними значениями показателей итоговой брачности когорт, для которых он рассчитан.

Сумма по  $i$  элементов календаря для календарного года  $\sum_{i=0}^w \alpha_{x,i} = T$  равна 1, если календарь не меняется от когорты к когорте. Тогда суммарный коэффициент брачности  $S$  равен средневзвешенному значению показателей итоговой брачности когорт  $p_i$ . Если  $T$  отклоняется от 1, то соотношение  $S/T$  покажет, каким был бы суммарный коэффициент брачности, если бы календарь брачности в реальных когортах не менялся.

## ЗАДАЧИ

*Задача 1. Расчет общего коэффициента брачности*

В России в 1996 году было зарегистрировано 867 тыс. браков, средняя численность населения составила 147739 тыс. человек. Рассчитайте общий коэффициент брачности. Что он показывает?

*Задача 2. Анализ изменения распределения населения по состоянию в браке*

На основе данных таблицы проанализируйте эволюцию брачного состояния населения России, зафиксированного в переписях населения. Какими факторами обусловлены отмеченные изменения?

Брачное состояние населения России (на 1000 человек данного пола в возрасте 16 лет и старше):

	Никогда не состоявшие в браке	Состоящие в браке	Вдовы	Разведенные, разошедшиеся
Мужчины				
1926	291	659	41	5
1979	233	708	19	39
1989	196	718	25	57
1994	195	723	29	53
Женщины				
1926	234	583	168	12
1979	158	569	198	74
1989	132	598	182	85
1994	142	585	174	96

*Источник: Население России за 100 лет. М., 1998. С. 76 – 77; Состояние в браке и рождаемость в России (по данным микропереписи населения 1994 г.). М., 1995. С. 8 – 9.*

*Задача 3. Анализ эволюции общей численности зарегистрированных браков и разводов*

На основе данных о браках и разводах, общих коэффициентах брачности и разводимости населения России в 1960 – 2001 гг., приведенных в таблице, проанализируйте их динамику. Для анализа используйте графики. Какие факторы обусловили эту динамику?

годы	Браки	Разводы	Общий коэффициент брачности, ‰	Общий коэффициент разводимости, ‰
1960	1499581	184398	12,5	1,5
1961	1354480	187165	11,1	1,5

1962	1238951	200829	10,1	1,6
1963	1132448	195176	9,1	1,6
1964	1083068	222898	8,6	1,8
1965	1097585	231389	8,7	1,8
1966	1146887	412501	9,0	3,2
1967	1164845	412293	9,1	3,2
1968	1168428	410209	9,1	3,2
1969	1254011	387698	9,7	3,0
1970	1319227	396589	10,1	3,0
1971	1358369	399339	10,4	3,1
1972	1318280	405010	10,0	3,1
1973	1398464	418513	10,6	3,2
1974	1449340	461100	10,9	3,5
1975	1495787	483825	11,1	3,6
1976	1448670	533246	10,7	3,9
1977	1521356	558353	11,2	4,1
1978	1514628	568495	11,1	4,1
1979	1535488	593898	11,1	4,3
1980	1464579	580720	10,6	4,2
1981	1472752	577507	10,6	4,1
1982	1460198	557623	10,4	4,0
1983	1479130	583026	10,5	4,1
1984	1367827	573705	9,6	4,0
1985	1389426	573981	9,7	4,0
1986	1417544	579387	9,8	4,0
1987	1442622	580106	9,9	4,0
1988	1397445	573863	9,5	3,9
1989	1384307	582500	9,4	3,9
1990	1319928	559918	8,9	3,8
1991	1277232	597930	8,6	4
1992	1053717	639248	7,1	4,3
1993	1106723	663282	7,5	4,5
1994	1080600	680494	7,4	4,6
1995	1075219	665904	7,3	4,5
1996	866651	562373	5,9	3,8
1997	928411	555160	6,3	3,8
1998	848691	501654	5,8	3,4
1999	911162	532533	6,2	3,6
2000	897327	627703	6,2	4,3
2001	1001589	763493	6,9	5,3
2002	1019762	853647	7,1	5,9
2003	1091778	798824	7,6	5,5
2004	979667	635835	6,8	4,4

Источник: Демографический ежегодник РФ. 2000. М., 2001. С. 119.; Демографический ежегодник РФ. 2005. М., 2006. С.148

*Задача 4. Анализ возраста вступления в брак по материалам переписей населения России*

В таблицах приведены данные о возрастных долях никогда не состоявших в браке (на 1000 человек данного пола и возраста) по материалам переписи населения 1979 г. и микропереписи 1994 г. На основе этих данных рассчитайте средний расчетный возраст вступления в брак у мужчин и женщин, в городском и сельском населении и прокомментируйте его эволюцию между двумя переписями.

1979 г.:

возраст	Все население		Городское население		Сельское население	
	мужчины	женщины	мужчины	женщины	мужчины	женщины
16 -17	933	972	992	976	994	961
18-19	954	795	952	826	960	671
20-24	588	359	588	392	589	252
25-29	179	120	177	132	183	78
30-34	84	66	81	72	94	43
35-39	50	39	47	41	57	32
40-44	32	34	30	34	36	34
45-49	19	40	18	36	20	48
50-54	13	53	12	44	16	69
55-59	10	64	9	52	13	89
60-69	7	47	6	38	9	61
70 лет и старше	7	33	7	29	8	38

Источник: Возрастной состав и состояние в браке населения РСФСР (по данным Всесоюзной переписи населения 1979 г.) М., 1980. – с. 60

1994 г.:

возраст	Все население		Городское население		Сельское население	
	мужчины	женщины	мужчины	женщины	мужчины	женщины
16 -19	971	855	970	867	973	812
20-24	596	374	593	398	602	287
25-29	236	143	233	157	243	99
30-34	129	79	123	89	144	51
35-39	85	56	79	62	104	38
40-49	56	48	51	52	74	34
50-59	34	39	30	41	44	35
60-69	18	60	17	52	21	78

70 лет и старше	18	82	19	67	17	112
-----------------	----	----	----	----	----	-----

Источник: Основные итоги микропереписи населения 1994 г. М., 1994. – сс. 38 - 39

**Задача 5. Анализ динамики первых и повторных браков в России в 1990-е гг.**

На основе данных, приведенных в таблице, проанализируйте динамику первых и повторных браков в России в 1990-е гг. Ответьте на вопросы:

- Как изменилась общая численность браков?
- Каково соотношение первых и повторных браков у мужчин и женщин? Изменилось ли соотношение и динамика первых и повторных браков?

Для ответов на вопросы используйте графики.

Динамика доли повторных браков (тыс.) в населении России в 1990-е гг.

годы	Все браки	Первые браки		Повторные браки	
		мужчины	Женщины	мужчины	женщины
1989	1384	1014,4	1019,3	369,9	365,0
1990	1320	985,3	994,4	334,7	325,6
1991	1277	948,6	954,5	328,6	322,7
1992	1054	773,2	783,0	280,6	270,7
1993	1107	817,5	825,6	289,3	281,1
1994	1081	789,2	793,2	291,4	287,4
1995	1075	776,0	780,1	299,3	295,1
1996	866,7	620,6	626,2	246,1	240,5
1997	928,4	663,7	672,0	264,7	256,5
1998	848,7	611,0	620,6	237,7	228,1
1999	911,2	660,8	671,5	250,4	239,7

Источник: Демографические ежегодник РФ. 2000. М., 2001. С. 119.; Население России. 2000. С. 29.

**Задача 6. Анализ сезонности брачности**

На основе данных о числе браков по месяцам года, представленных в таблице, проанализируйте сезонность брачности в населении Москвы.

годы	январь	февраль	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь
1900	1007	948	19	672	407	309	582	234	475	749	659	25
1910	1321	1594	14	669	586	728	732	459	737	1063	788	26
1920	1683	1691	1517	2065	2222	2290	2064	1556	1707	1568	1767	1233
1930	1143	1192	830	946	843	873	892	929	1039	1116	1127	1040
1940	3936	3475	3332	3087	3325	3220	3416	4278	4849	4333	4609	4723



45-49	1										
-------	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

*Задача 8<sup>72</sup>. Расчет частоты первых браков и среднего возраста вступления в первый брак*

На основе данных таблицы рассчитайте частоту первых браков в календарном году и средний возраст вступления в первый брак:

поколение	число первых браков в 1956 г.	средняя численность женщин в 1956 г.
1941-1937	5671	228947
1936-1932	22200	213393
1931-1927	10799	230078
1926-1922	3750	256232
1921-1917	1506	273400
1916-1912	767	265795
1911-1907	512	267419

*Задача 9. Анализ суммарных коэффициентов брачности в Европе*

В таблице приводится динамика суммарного коэффициента первых браков (на 1000 человек) в 1960 – 1990-е гг. в нескольких странах Европы. Прокомментируйте его динамику. Как объяснить тот факт, что в некоторые годы суммарный коэффициент первых браков превышает 1000?

страны	мужчины				женщины			
	1965	1975	1985	1995	1965	1975	1985	1995
Финляндия	959	638	610	523	930	702	668	568
Норвегия	921	755	546	500	872	794	571	540
Швеция	986	566	479	418	957	628	514	442
Австрия	923	731	637	498	994	751	613	554
Бельгия	992	854	688	522	1002	888	718	570
Франция	1013	822	530	480	993	858	542	490
Нидерланды	1124	767	627	505	1130	827	647	547
Швейцария	892	624	651	581	897	650	671	636
Греция	1218	1180	942	730	1185	1158	986	758
Италия	998	894	731	598	1024	931	733	625
Португалия	1105	1450	798	752	1012	1275	811	761
Испания	1008	949	684	570	982	1024	675	589
Болгария	951	969	878	545	893	1010	943	556

<sup>72</sup> Wunsch G., Termot M. Introduction to demographic analysis. – N.-Y.: Plenum Press, 1978. – p. 129

Венгрия	986	944	796	572	978	998	880	555
Россия		1036	883	729		1032	967	750

*Задача 10\*<sup>73</sup>. Построение таблицы первых браков в условном поколении*

На основе данных, приведенных в таблице, постройте таблицу первых браков для условного поколения. Рассчитайте:

- 1) среднее число первых браков, приходящееся на 1 человека;
- 2) средний возраст вступления в первый брак.

возрастные группы	число первых браков в интервале возраста	средняя численность одиноких в возрастном интервале
15-19	47636	839812
20-24	72058	324762
25-29	14337	97738
30-34	3875	56940
35-39	1802	50355
40-44	1019	48073
45-49	583	43227

точный возраст	числа никогда не состоявших в браке	браки ${}_5m_x$	вероятность вступления в первый брак
x	$C_x$	${}_5m_x$	${}_5n_x$
15			
20			
25			
30			
35			
40			
45			
50			

*Задача 11<sup>74</sup>. Расчет среднего возраста вступления в брак по данным переписи населения*

На основе данных таблицы рассчитайте методом Хаджнала:

- 1) среднее число браков, приходящееся на 1 человека;

<sup>73</sup> Wunsch G., Termot M. Introduction to demographic analysis. – N.-Y.: Plenum Press, 1978. – p. 128

<sup>74</sup> Wunsch G., Termot M. Introduction to demographic analysis. – N.-Y.: Plenum Press, 1978. – p. 138

## 2) средний возраст вступления в первый брак.

возрастные группы	доля несостоящих в браке в возрастной группе
15-19	0,98686
20-24	0,69962
25-29	0,29336
30-34	0,16171
35-39	0,12741
40-44	0,10584
45-49	0,09480
50-54	0,09113

*Задача 12\*. Изучение первой брачности в поколениях на основе долей одиноких в различных возрастах, полученных по материалам переписей населения<sup>75</sup>*

На основе переписей, которые регулярно проводятся в Ирландии, построена таблица, в которой приведены доли женщин, не состоящих в браке в 5-летних возрастных группах (на 1000 женщин).

1) Нанесите эти данные на демографическую сетку.

2) Рассчитайте в группах поколений (где возможно) долю окончательного безбрачия в 50 лет, используя среднюю между долями в возрастах 45 – 49 лет и 50 – 54 года.

3) Предположив, что средний возраст одиноких в возрастной группе 15 – 19 лет равен 17,5 года (то есть число никогда не состоявших в браке меняется линейно) и т.д., рассчитайте таблицу первой брачности наиболее молодой группы поколений (включив в нее следующие ряды: числа никогда не состоявших в браке, одиноких, числа первых браков, вероятности вступления в первый брак).

4) Рассчитайте возраст вступления в брак для тех поколений, где это возможно.

5) Коротко прокомментируйте эволюцию брачности в группах поколений.

Возрастные группы	поколения											
	1926	1931	1936	1941	1946	1951	1956	1961	1966	1971	1976	1981

<sup>75</sup> Dittgen A., Lamy-Festy M. Travaux pratiques d'analyse démographique. – Paris, 1989, p. 59 – 60

15-19	993	992	991	988	984	989	989	989	984	979	978	977
20-24	870	865	864	835	825	823	805	782	748	689	685	677
25-29	618	620	641	615	575	544	495	451	378	312	280	288
30-34	416	435	441	450	388	364	340	296	241	194	165	146
35-39	325	325	328	330	321	285	260	235	212	171	140	112
40-44	264	270	270	285	276	267	240	220	195	178	145	118
45-49	242	250	257	255	263	263	255	221	204	182	162	134
50-54	237	238	245	250	248	250	245	242	211	195	175	157

*Задача 13\*. Поперечный анализ первых браков на основе данных о никогда не состоявших в браке*<sup>76</sup>

Продолжим изучать брачность в Ирландии. Мы располагаем данными о мужчинах, не состоявших в браке, по материалам переписей.

1) Нанесите эти данные на демографическую сетку.

2) Рассчитайте в поколениях среднюю интенсивность брачности и показатель окончательного безбрачия.

3) Рассчитайте суммарные коэффициенты первых браков для календарных лет (с 1926 – 0 по 1976 – 80 гг.).

Нанесите на график интенсивности первой брачности в поколениях, приняв за средний возраст брака 31 год, и периодные интенсивности для условных поколений. Прокомментируйте полученный график.

Возраст- ные группы	поколения											
	1926	1931	1936	1941	1946	1951	1956	1961	1966	1971	1976	1981
15-19	999	999	999	999	998	999	999	999	997	995	995	994
20-24	960	965	962	955	950	949	930	925	896	846	836	824
25-29	798	820	823	810	797	766	745	672	585	492	465	436
30-34	624	628	635	640	610	579	545	492	409	322	275	242
35-39	496	490	484	490	473	447	420	389	355	289	230	187
40-44	402	400	393	395	379	359	345	336	313	290	245	202
45-49	335	350	347	340	334	320	310	305	299	283	260	225
50-54	293	310	322	310	305	300	295	287	284	279	270	253

*Задача 14*<sup>77</sup>. Анализ брачности на основе ретроспективного обследования

<sup>76</sup> Dittgen A., Lamy-Festy M. Travaux pratiques d'analyse démographique. – Paris, 1989, p. 66

<sup>77</sup> Franck Cadier C. Démographie. Tome 1. – Paris: Economica, 1990. – pp. 77 – 79

На основе данных ретроспективного обследования 50000 женщин поколения 1932 года рождения, проведенного в сентябре 1983 года, была построена следующая таблица:

точный возраст	число не состоящих в браке
20	42500
25	22525
30	13515
35	10812
40	9731
45	9245
50	9014

Браки отсутствуют до точного возраста 15 лет и после 50 лет.

1) Рассчитайте чистую краткую таблицу первой брачности для этого поколения, приняв за корень таблицы число одиноких в точном возрасте 15 лет, равное 100000.

2) Рассчитайте показатель интенсивности брачности одиноких и показатель календаря первых браков. Приведите гипотезы, которые Вы при этом принимаете во внимание.

#### Задача 15<sup>78\*</sup>

Французский Статистический Институт (INED) ежегодно публикует распределение по возрасту коэффициентов вступления в первый брак. В таблице приведена сумма этих коэффициентов (S) для каждого года (на 10 тыс. женщин).

1) Что означает этот показатель?

2) Постройте график этого показателя и прокомментируйте его эволюцию.

годы	S	T	годы	S
1931	9181	10158	1957	9397
1932	8894	9629	1958	9581
1933	9301	10281	1959	10060
1934	9207	10188	1960	10244
1935	9191	10179	1961	10162
1936	9480	10510	1962	10167
1937	9504	10545	1963	10656

<sup>78</sup> Dittgen A., Lamy-Festy M. Travaux pratiques d'analyse démographique. – Paris, 1989. pp. 64 - 65

1938	9390	10409	1964	10476
1939	8279	9173	1965	9915
1940	5572	6166	1966	9189
1941	7167	7919	1967	8855
1942	8225	9075	1968	8798
1943	6499	7160	1969	9072
1944	6114	6730	1970	9155
1945	11789	12965	1971	9301
1946	15176	16654	1972	9429
1947	12039	13176	1973	9024
1948	10321	11271	1974	8852
1949	9578	10433	1975	8581
1950	9353	10171	1976	8224
1951	9048	9829	1977	8001
1952	8934	9700	1978	7653
1953	8909	9666	1979	7311
1954	9206	9985	1980	7137
1955	9269	10054	1981	6667
1956	8715	9455	1982	6565
			1983	6240
			1984	5811
			1985	5500
			1986	5300

Для каждого поколения, достигшего 50 лет, были рассчитаны доли браков, заключенных в каждом возрасте, или элементы календаря брачности. Сумма (Т) этих элементов (элемент календаря – отношение коэффициента брачности в возрасте  $x$  к сумме всех коэффициентов во всех возрастах) приведена в таблице.

3) Добавьте график показателя Т на предыдущий график и прокомментируйте его эволюцию.

4) Рассчитайте, где это возможно, соотношение  $S/T$  и также нанесите его на график. Что оно показывает?

Для каждого возраста в 1956 году было рассчитано соотношение коэффициента и элемента календаря. Результаты представлены в таблице:

возраст	коэффициент /элемент календаря	возраст	коэффициент /элемент календаря
15	9239	33	9094
16	9276	34	9108
17	9224	35	9077
18	9234	36	9179
19	9235	37	9018

20	9201	38	8981
21	9193	39	8977
22	9244	40	8905
23	9234	41	8983
24	9270	42	9063
25	9197	43	9065
26	9272	44	9147
27	9264	45	9130
28	9254	46	9114
29	9219	47	9084
30	9155	48	9058
31	9141	49	9031
32	9149	50	9010

5) Каков смысл этого соотношения?

6) Нанесите эти значения на тот же график с учетом того, что средний возраст вступления в брак в поколениях равен примерно 23 годам. 3) Сравните полученную кривую с кривой S/T и объясните различие в их динамике.

7) Дополните свои комментарии об эволюции суммы коэффициентов S.

#### Задача 16. Анализ брачной структуры

В представленной таблице дано распределение по состоянию в браке и по возрастным группам населения России по данным переписей населения (на 1000 человек данного пола и возраста):

Возраст	Мужчины						Женщины					
	1926	1939	1959	1970	1979	1989	1926	1939	1959	1970	1979	1989
Все население	659	702	692	716	708	718	583	597	505	563	569	598
16-17	9	5	4	4	7	11	45	34	24	20	27	37
18-19	138	63	38	40	40	48	280	222	143	159	193	230
20-24	509	361	269	297	395	381	682	599	479	536	595	618
25-29	827	757	802	771	775	742	843	783	752	819	793	798
30-34	914	904	921	878	850	821	840	815	768	848	817	822
35-39	939	937	953	926	874	840	807	794	711	834	810	804
40-44	943	945	963	942	894	845	756	751	606	783	795	772
45-49	935	940	965	949	915	847	696	676	525	708	758	737
50-54	912	925	958	952	924	863	614	589	452	588	683	708
55-59	883	898	946	949	927	880	545	488	392	478	571	636
60-69	785	817	908	925	910	873	408	363	332	342	368	481
70 и более	532	581	718	771	782	748	200	162	158	176	153	162

Источник: Население России за 100 лет (1897-1997): Стат.сб. / Госкомстат России. – М., 1998. стр. 80

- 1) Что можно сказать об эволюции брачности в ранних возрастах?
- 2) Рассчитайте доли не состоящих в браке в репродуктивных возрастах. Каковы демографические последствия динамики этого показателя?
- 3) Сравните динамику состояния в браке по возрастам у мужчин и женщин. Какие факторы влияли на величины долей состоящих в браке в различные календарные периоды у мужчин и у женщин?

*Задача 17. Анализ брачной структуры*

Состояние в браке по данным переписей населения (на 1000 населения данного пола и возраста)

Возраст	Мужчины				Женщины			
	1	2	3	4	1	2	3	4
<b>1926</b>								
Все население	291	659	41	5	234	583	168	12
16-17	991	9	0	0	953	45	0	1
18-19	857	138	1	3	708	280	2	9
20-24	475	509	3	9	280	682	11	24
25-29	156	827	5	8	91	843	39	23
30-34	68	914	8	7	57	840	82	17
35-39	41	939	11	6	43	807	134	13
40-44	31	943	18	5	42	756	189	9
45-49	27	935	31	5	41	696	253	7
50-54	24	912	57	4	41	614	337	5
55-59	21	883	90	4	39	545	408	4
60-69	20	785	189	3	38	408	548	2
70 и более	19	532	442	2	37	200	757	1
<b>1979</b>								
Все население	233	708	19	39	158	569	198	74
16-17	993	7	0	0	972	27	0	1
18-19	954	40	0	1	795	193	1	8
20-24	588	395	0	14	359	595	4	40
25-29	179	775	1	44	120	793	9	77
30-34	84	850	2	63	66	817	17	99
35-39	50	874	5	71	39	810	35	116
40-44	32	894	8	66	34	795	54	117

45-49	19	915	13	53	40	758	93	109
50-54	13	924	20	43	53	683	154	110
55-59	10	927	30	33	64	571	267	97
60-69	7	910	61	22	47	368	529	55
70 и более	7	782	196	13	33	153	788	24
<b>1989</b>								
Все население	196	718	25	57	132	598	182	85
16-17	989	11	0	0	961	37	1	1
18-19	938	48	0	1	750	230	1	7
20-24	595	381	0	15	335	618	3	38
25-29	208	742	1	44	120	798	7	71
30-34	105	821	2	69	69	822	13	94
35-39	68	840	4	86	53	804	25	116
40-44	47	845	8	97	45	772	43	138
45-49	37	847	17	97	35	737	85	141
50-54	26	863	25	83	33	708	128	129
55-59	17	880	41	60	42	636	214	105
60-69	12	873	74	38	62	481	370	83
70 и более	9	748	223	16	47	162	752	34

Источник: *Население России за 100 лет (1897-1997): Стат.сб. / Госкомстат России. - М., 1998. стр. 76*

- 1 – Никогда не состоявшие в браке
- 2 – Состоящие в браке
- 3 – Вдовы
- 4 – Разведенные и разошедшиеся

1) Что можно сказать об эволюции первой брачности женщин между переписями, сравнивая доли одиноких в возрастных группах? Сравните динамику первой брачности женщин с аналогичными показателями у мужчин.

2) Проанализируйте на каждую дату доли вдов и прокомментируйте результаты.

3) Используя данные о возрастной структуре населения (Приложение 1), рассчитайте на каждую дату долю вдов в возрасте 70 лет и старше по отношению ко всей совокупности женщин.

4) Прокомментируйте эволюцию разведенных в возрастных группах между переписями.

*Задача 18. Анализ брачности в Кыргызстане*

По результатам первой национальной переписи населения Кыргызстана 1999 года были получены следующие оценки доли женщин (в %), никогда не вступавших в брак, для трех национальностей:

Возраст	Кыргызки	Русские	Узбечки
15-19	88,3	90,8	88,6
20-24	34,5	45,4	20,9
25-29	11,8	18,0	4,0
30-34	5,2	8,6	1,6
35-39	3,3	5,3	1,2
40-44	2,2	4,2	0,8
45-49	1,4	3,4	0,7
50-54	0,8	3,1	0,4

- 1) Постройте графики возрастных распределений никогда не вступавших в брак.
- 2) Рассчитайте средний расчетный возраст вступления в первый брак для каждой национальности.
- 3) Как различаются возрастные характеристики брачности кыргызов, русских и узбечек?
- 4) Как соотносятся показатели «средний возраст вступления в брак» и «средний расчетный возраст вступления в первый брак»? Объясните различия между этими показателями.

*Задача 19*

На основе данных Мосгорстата о численности населения Москвы, числе браков и разводов рассчитайте общие коэффициенты брачности и разводимости и прокомментируйте их динамику.

Годы	Численность населения на начало года	Число браков	Число разводов
1990	8910969	84731	43380
1991	8911339	75682	43959
1992	8864916	61239	42020
1993	8789193	67372	44841
1994	8700892	72028	42691
1995	8625392	70975	40136

1996	8572394	65779	44225
1997	8546637	68518	43965
1998	8537230	66370	43110
1999	8538248		

Источник: Естественное движение населения города Москвы. Мосгоркомстат. № 75. – М., 1999. – сс. 10, 28

### Задача 20

В таблице приведены ряды показателя никогда не состоявших в браке женщин некоторых титульных национальностей союзных республик СССР из таблиц брачности 1989 – 1993 гг., построенных Л.Е. Дарским и И.П. Ильиной:

Возраст (лет)	Армянки	Белоруски	Грузинки	Казашки	Киргизки	Латышки	Русские
15	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000
20	67004	77470	72958	85104	70677	80692	71804
25	26224	21454	36270	30554	16075	24504	20398
30	14674	8714	20788	14186	4582	11106	8934
35	10669	5182	14434	9271	1771	7333	5676
40	8771	3923	11779	7110	793	5887	4392
45	7673	3339	10478	4259	410	5242	3675
50	6998	2975	9771	3518	243	4914	3202

Источник: Л.Е. Дарский, И.П. Ильина Брачность в России. Анализ таблиц брачности./ Под ред. А.Г. Волкова – М.: Информатика, 2000.

Рассчитайте для этих групп женщин и сравните:

- 1) Табличные числа браков
- 2) Возрастные вероятности вступления в брак
- 3) Показатели окончательного безбрачия и интенсивности брачности
- 4) Показатели среднего возраста вступления в брак

### РЕШЕНИЯ

#### Решение Задачи 10

Возрастные группы (исполнившихся лет) $x$	число первых браков	средняя численность одиноких в возрастной группе	коэффициент первых браков ${}_5N_x$
15-19	47636	839812	0,056722219
20-24	72058	324762	0,221879407
25-29	14337	97738	0,146688084

30-34	3875	56940	0,068054092
35-39	1802	50355	0,03578592
40-44	1019	48073	0,02119693
45-49	583	43227	0,013486941

Таблица первых браков:

точный возраст $x$	никогда не состоявшие в браке $C_x$	число первых браков ${}_5m_x$	вероятность вступления в первый брак ${}_5p_x$	середина возрастного интервала $x+0,5n$	${}_5m_x^*(x+0,5n)$
15	100000	24839	0,24839	17,5	434679,5
20	75161	53633	0,71358	22,5	1206749
25	21528	11553	0,53664	27,5	317701,6
30	9975	2901	0,29080	32,5	94273,38
35	7074	1162	0,16424	37,5	43570,15
40	5913	595	0,10065	42,5	25291,76
45	5317	347	0,06524	47,5	16476,91
50	4971				
Итого:		95029			2138742

1) Среднее число первых браков, приходящееся на 1 человека:

$$(100\ 000-4971)/100\ 000=0,95$$

2) Средний возраст вступления в первый брак:  $2138742/95029=22,51$  года

#### Решение Задачи 12

2) На демографической сетке видно, что можно рассчитать доли окончательного безбрачия для поколений с 1876-1880 по 1926-1930 гг., поскольку для них известны доли одиноких в последних 2-х возрастных группах

Доля не состоящих в браке в поколениях к 50 годам (на каждую 1000 женщин):

1876-1880	1881-1885	1886-1890	1891-1895	1896-1900	1901-1905	1906-1910	1911-1915	1916-1920	1921-1925	1926-1930
240	247,5	253,5	251,5	256,5	254	249	216	200	179	160

3) Считая, что разница в смертности по брачному состоянию отсутствует, можно принять, что доли одиноких соответствуют табличным числам одиноких и построить таблицу первых браков для группы поколений 1926-1930 гг.:

точный возраст $x$	никогда не состоявшие в браке $C_x$	число первых браков ${}_5m_x$	вероятность вступления в первый брак ${}_5p_x$	середина возрастного интервала $x+0,5n$	${}_5m_x^*(x+0,5n)$
--------------------	-------------------------------------	-------------------------------	--	---	---------------------

15	1000	16	0,016	16,25	260
17,5	984	161	0,164	20	3220
22,5	823	328	0,399	25	8200
27,5	495	199	0,402	30	5970
32,5	296	84	0,284	36	3024
37,5	212	34	0,160	40	1360
42,5	178	16	0,090	45	720
47,5	162	3	0,019	48,75	146,3
50	159				
Итого:		841			22900

4) Средний возраст вступления в первый брак в поколениях:

1906-1910 – 28,7

1911-1915 – 28,4

1916-1920 – 27,9

1921-1925 – 27,6

1926-1930 – 27,2

#### Решение Задачи 13

1) Если нанести данные на демографическую сетку, то можно увидеть, что показатель окончательного безбрачия можно рассчитать в поколениях от 1876 – 1880 до 1926 – 30 гг.

поколение	1876-1880	1881-1885	1886-1890	1891-1895	1896-1900	1901-1905	1906-1910	1911-1915	1916-1920	1921-1925	1926-1930
доля окончательного безбрачия	323	336	329	323	317	308	299	295	289	277	257
интенсивность брачности	678	664	672	678	683	693	702	706	711	724	744

2) Для расчета суммарных коэффициентов брачности по периодам нужно получить разницу долей между двумя переписями в каждой группе поколений, за исключением самых старших и самых молодых поколения: для первой возрастной группы – разницу между 1000 и числом браков в 15 – 19 лет; для последней возрастной группы – разницу между числом одиноких в 50 лет и и предыдущей переписью.

Для периода 1926 – 30 гг. получаем 1 брак между возрастом 15 лет и 15 – 19 годами (1000-999); 34 брака между 15 – 19 и 20 – 24 годами (999-965) и т.д.; 13 браков между 45 – 49 годами и возрастом 50 лет (335-322).

*Решение Задачи 15*

Возрастные коэффициенты брачности и суммарная брачность:

середина возрастного интервала	Календарные годы										
	1926- 1930	1931- 1935	1936- 1940	1941- 1945	1946- 1950	1951- 1955	1956- 1960	1961- 1965	1966- 1970	1971- 1975	1976- 1980
16,25	1	1	1	2	1	1	2	3	5	5	6
20	34	37	44	49	49	69	74	103	151	159	171
25	140	142	152	158	184	204	258	340	404	381	400
30	170	185	183	200	218	221	253	263	263	217	223
35	134	144	145	167	163	159	156	137	120	92	88
40	96	97	89	111	114	102	84	76	65	44	28
45	52	53	53	61	59	49	40	37	30	30	20
48,75	13	14	19	18	17	13	12	11	10	7	4
<b>S</b>	<b>640</b>	<b>673</b>	<b>686</b>	<b>766</b>	<b>805</b>	<b>818</b>	<b>879</b>	<b>970</b>	<b>1048</b>	<b>935</b>	<b>940</b>

Нанесем интенсивность брачности в поколениях I и суммарные коэффициенты брачности календарных лет S на график (средний возраст заключения брака поколения 1876-1880 гг. приходится на середину 1878 г. + 31 год = 1 июля 1909 года и т.п.):

годы	I	S
1,07,1909	678	
1,07,1914	664	
1,07,1919	672	
1,07,1924	678	
1,07,1929	683	640
1,07,1934	693	673
1,07,1939	702	685,5
1,07,1944	706	765,5
1,07,1949	711	805
1,07,1954	724	817,5
1,07,1959	744	878,5
1,07,1964		969,5
1,07,1969		1048
1,07,1974		934,5
1,07,1979		939,5

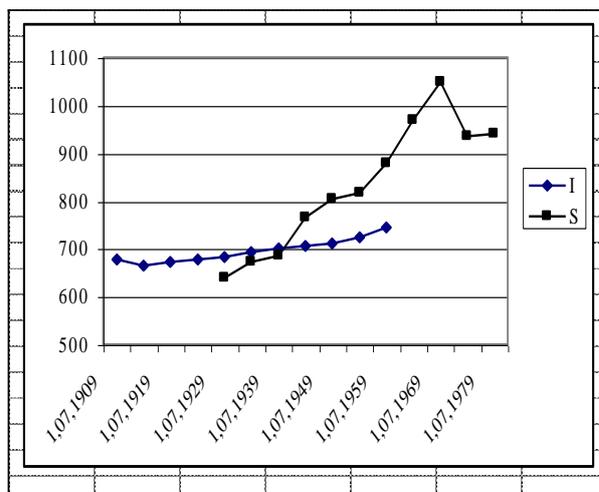


Рис. 6.4. Итоговая брачность поколений I и суммарный коэффициент брачности календарных лет S

- 1) S представляет собой годовую сумму коэффициентов брачности  $b_{x,i}$ , где  $x$  – возраст,  $i$  – поколение, зависящую от интенсивности и календаря брачности в поколениях  $i$  данного года. Поскольку коэффициенты рассчитаны на 10 тыс. женщин, в сумме S всем поколениям придан одинаковый вес. Эта сумма показывает, какой бы была брачность в условном поколении при отсутствии смертности, если бы во всех возрастах в этом поколении сохранялась брачность, которая описывается повозрастными коэффициентами данного года.
- 2) Кривая S имеет четко выраженный пик и значительный размах с минимумом, равным 5300, и максимумом, равным 15176. Вплоть до 1938 года наблюдаются колебания от 9000 до 9800. Во время войны сумма становится очень маленькой (от 5500 до 8000), и ее значение вырастает в 2,5 раза в конце войны, а затем возвращается на уровень 9000 в 1950-е гг. Затем следует период роста (свыше 10000 между 1958 и 1964 гг.), а затем возврат к 9000 в 1965 г. С 1963 года наблюдается тенденция к снижению суммарного коэффициента брачности, последний опускается ниже довоенных значений. После войны суммарный коэффициент значительно превышает 10000, то есть более одного первого брака на одного человека, никогда не состоявшего в браке. В этом случае к «нормальным» бракам добавляются браки тех женщин,

которые отложили вступление в брак во время войны. Суммарный коэффициент превышает 10000 также в период с 1958 по 1964 гг., отражая омоложение возраста вступления в брак. По сути, нам известно, что, если интенсивность брачности в поколениях не меняется, но календарь при этом варьирует от поколения к поколению, суммарный коэффициент для периода отклоняется от интенсивности процесса в реальных поколениях. Суммарный коэффициент периода превышает интенсивность в реальных когортах на  $n\%$  если от поколения к поколению средний возраст вступления в брак снижается на  $n$  сотых года.

- 3) Элемент календаря  $\alpha_{x,i}$  в возрасте  $x$  в поколении  $i$  можно получить, разделив коэффициент  $m_{x,i}$  на сумму коэффициентов поколения, то есть на интенсивность  $p_i$ . Иными словами  $\alpha_{x,i} = b_{x,i}/p_i$ .  $T = \text{сумме } \alpha_{x,i} = \text{сумме } (b_{x,i}/p_i)$ . Таким образом,  $T$  (сумма элементов календаря) меняется только в зависимости от календаря брачности в поколениях, наблюдаемых в данном году, то есть в зависимости от изменения среднего возраста вступления в брак от поколения к поколению. Отклонение  $T$  от единицы измеряет вариацию среднего возраста вступления в брак. Если  $T=1$ , календарь в поколениях не меняется, если  $T>1$ , средний возраст вступления в брак снижается в каждом последующем поколении, если  $T<1$ , средний возраст растет.  $T=1,1$  означает снижение возраста на  $1/10$  года от поколения к поколению. В течение 25 лет, данными для которых мы располагаем, зарегистрировано 2 периода, где  $T$  больше 10000: вплоть до 1938 г., и затем после второй мировой войны с 1945 по 1948 гг., когда старые поколения догоняли по брачности более молодые поколения, и затем наблюдается возврат к «нормальному» возрасту в недавних поколениях. Если в довоенный период наблюдается слабое омоложение возраста вступления в брак от поколения к поколению (максимум на 0,02 года), возврат к нормальному состоянию в 1946 году снизил возраст на полгода. В противоположность снижению возраста вступления в брак, его рост никогда не был таким заметным, максимум достигнут в 1944 году (рост на 0,33 от поколения к поколению), что

связано с откладыванием брака на время войны. Кривая T имеет такой же пик, как и кривая суммарного коэффициента брачности, их пики совпадают, отражая влияние вариации календаря поколений на суммарный коэффициент брачности для периода.

- 4) Соотношение  $S/T$  можно рассчитать для периода с 1931 по 1956 гг., для которого мы располагаем значениями T. Это соотношение демонстрирует интенсивность брачности в поколениях.  $S/T = (\text{сумма } \alpha_{x,i} P_i) / (\text{сумма } \alpha_{x,i})$ , то есть иными словами это средняя взвешенная интенсивностей поколений  $P_i$  в поколениях  $i$ , где весами служат элементы календаря  $\alpha_{x,i}$  данного года. Это соотношение мало меняется в течение изучаемого периода, но тем не менее оно слабо растет, от 0,89 в 1938 г. до 0,92 в 1956 г. Отношение повозрастных коэффициентов к элементам календаря в 1956 году дает нам интенсивность  $P$  брачности в поколении  $i$ , которое находится в возрасте  $x$  в этом 1956 году.

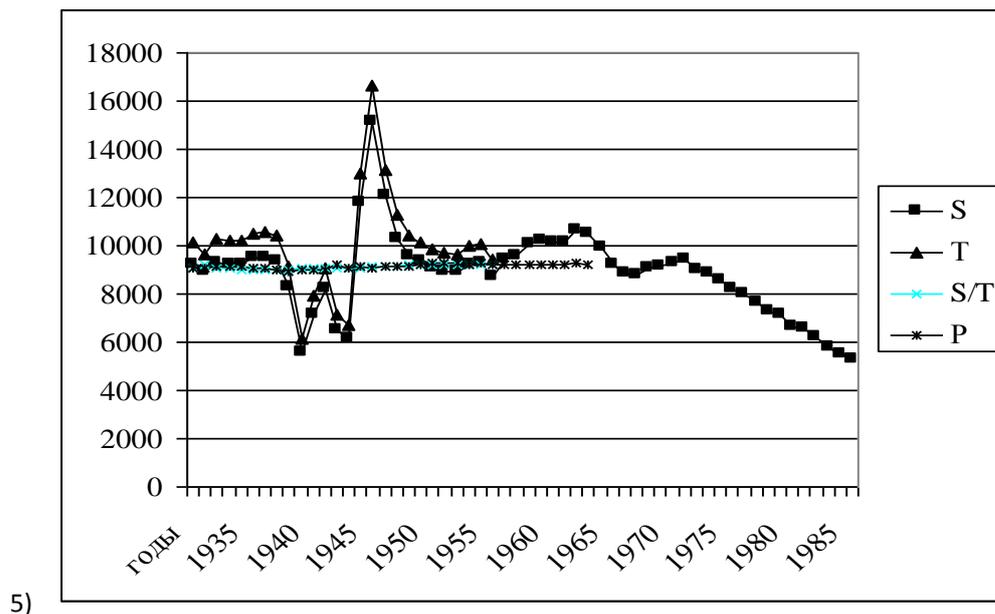


Рис. 6.5. Суммарный коэффициент брачности календарных лет  $S$  и сумма элементов календаря  $T$ , итоговая брачность  $P$

- 6) Можно нанести значения этого соотношения на график, помещая значения в те точки, где в среднем заключались браки поколения. Например, для поколения 1941 года рождения – в точке 1.07.1964

(1941+23), т.к. по условию задачи браки в среднем приходились на возраст 23 года. Можно отметить, что кривая Р очень близко расположена к кривой S/T, так как отношение S/T, то есть средняя взвешенная интенсивностей в 35 поколениях, имеет тенденцию к сглаживанию интенсивностей в поколениях. Видно, что когда кривая S находится выше кривой Р, Т превышает 1, и если S ниже Р, Т ниже 1, что означает снижение возраста вступления в брак в поколениях. При этом S больше Р на  $n\%$  когда имеет место снижение возраста вступления в брак на  $n$  сотых года.

- 7) Сравнение двух последних кривых с кривой S подтверждает то, что было видно на основе кривой Т.
- 8) Очень сильное снижение суммарного коэффициента брачности в конце периода почти наверняка связано со снижением брачности, которое сопровождается развитием института фактических браков и ростом возраста вступления в брак.

## РАЗДЕЛ 7. АНАЛИЗ МИГРАЦИИ

Под миграцией понимают перемещение людей из одного населенного пункта в другой в связи с переменой места жительства на более или менее длительное время<sup>79</sup>. Соответственно, мигрант – это человек, который переселился из одного населенного пункта в другой. В зависимости от типа прежнего и нового места пребывания мигрантов выделяют миграцию между городскими поселениями, между городами и сельскими поселениями, только между сельскими поселениями. Если мигранты пересекают территориально-административные границы внутри страны (между областями, между районами области и др.), то говорят о внутренней миграции (межрегиональной, внутриобластной). Если же в процессе миграции пересекается государственная граница, и мигранты переезжают из одной в другую страну, то речь идет о международной (межгосударственной) миграции.

За видимой простотой и ясностью определений миграции и мигрантов стоит сложность их реализации на практике. Это связано с тем, что в мире не существует однозначных территориально-временных критериев, определяющих как постоянное место жительства, так и его изменение.<sup>80</sup> Выбор этих критериев зависит в том числе от различных факторов нестатистического порядка, которые находят свое выражение в существующих в той или иной стране методах сбора статистической информации (переписи или выборочные обследования, регистры или текущий учет). В учетной практике различных стран можно найти большое разнообразие определений, которые основаны на действующих административно-правовых положениях. Они служат основой для регистрации мигрантов и предоставления им определенного правового статуса (резидент, нерезидент, иммигрант, временный рабочий и т.д.). Все эти обстоятельства существенно усложняют изучение миграционных процессов: их пространственно-временные закономерностей, факторов, последствий, а также сравнительный анализ миграционного движения в разных странах или в одной стране, но за различные промежутки времени.

---

<sup>79</sup> Перемещения людей внутри населенного пункта называют внутриселенческими. Из них выделяются внутригородские перемещения, изучение которых, особенно в случае больших городов, имеет огромную научно-практическую ценность.

<sup>80</sup> Постоянное место жительства

Переписи населения, а также проведенные по специальным методикам репрезентативные в национальном масштабе выборочные обследования, позволяют оценить численность мигрантов. По наиболее распространенным определениям к мигрантам относятся те люди, которые в момент предыдущей переписи или за несколько лет до проведения данной переписи или выборочного обследования проживали на одной территории, а в момент опроса – на другой. Вопрос о месте рождения в переписях позволяет определить численность так называемых «пожизненных мигрантов», т.е. жителей страны, у которых место рождения и место проживания в момент переписи или обследования не совпадают. Однако данные переписей, а тем более – национальных выборочных обследований, результаты которых распространяются статистиками на все население, не являются идеальными. В этих источниках данных недоучитывается определенное количество мигрантов. Так, в материалах переписи скорее всего не будут учтены как мигранты те люди, которые в течение межпереписного периода переехали из региона А в регион В, а затем вернулись в регион А. Очевидно, что в число мигрантов не попадают те из них, которые умерли до момента проведения переписного опроса.

В системах текущего учета регистрируются территориальные перемещения через административно-территориальные границы, предусмотренные законодательством страны, включая миграцию. Однако в разных странах установлены различные нижние временные границы для определения миграции, например, 1 месяц, 3 месяца, 6 месяцев или 12 месяцев отсутствия на прежнем и проживания в новом месте жительства. В ряде стран временные критерии миграции задаются в неявном виде: мигрантом является лицо, получившее статуса постоянного жителя данного населенного пункта или страны, что подтверждается процедурой регистрации и получением соответствующего документа. Так, в США к иммигрантам относят тех иностранцев, которым на законных основаниях предоставлена привилегия постоянного проживания в Соединенных Штатах. Эта привилегия позволяет иностранцу остаться в стране «навсегда». Однако это не означает, что предоставленный законом срок пребывания мигранта совпадет с действительным временем его пребывания в стране.

Следует обратить внимание на то, что временные критерии определения миграции, как правило, различаются для внутренних и внешних потоков, а также со временем могут изменяться в одной и той же стране. Выбор временных критериев зависит от целого ряда факторов, включая экономические интересы страны, политическую обстановку, безопасность, физические возможности мигрантов по обустройству и прочее. В свою очередь практические потребности привели к необходимости выделения в многообразии миграционных потоков краткосрочных (временных) и долгосрочных (постоянных) перемещений. В краткосрочных перемещениях значительную долю составляют так называемые возвратные миграции. К ним относятся сезонные миграции, когда человек, покинувший место своего постоянного проживания, по завершении, например, работы или учебы через несколько месяцев возвращается обратно домой. Специалисты из Отдела Статистики и Отдела Народонаселения ООН в целях унификации системы сбора данных предлагают относить к краткосрочным миграционным перемещениям все перемещения на срок от 3 месяцев до 1 года, а к долгосрочным – перемещения на срок свыше 1 года.

Необходимо помнить, что в системах текущего учета миграции объект наблюдения – миграционные перемещения, а не мигранты. Поскольку один человек за исследуемый временной интервал может сменить место жительства два и более раза, постольку число перемещений превышает численность мигрантов. Для того, чтобы узнать численность последних по данным текущего учета, надо из общего числа перемещений вычесть число повторных выездов. Кроме того, во многих системах текущего учета к мигрантам не относят отдельные группы мобильного населения, например, тех, кто уехал на отдых или на лечение на длительный срок, военнослужащих и членов их семей и др.

Статистические недостатки данных о миграции в переписях и текущем учете преодолеваются благодаря введению регистров населения. В регистрах, как известно, фиксируются все изменения постоянного места жительства каждого конкретного человека. Однако всегда существует круг людей, которые по разным причинам не регистрируются на своем новом месте проживания. Оценка таких незарегистрированных мигрантов представляет собой отдельную

тему, а нелегальная международная миграция вообще – животрепещущую проблему в развитых странах мира.

Таким образом, в отличие от процессов рождаемости и смертности, события которых статистически четко и, как правило, однозначно определены,<sup>81</sup> важной составляющей изучения миграционных процессов является анализ природы, качества и непротиворечивости статистической информации, полученной из различных источников. Если такой анализ не проводится, то прямая, некритическая интерпретация данных может привести к ложным выводам.

### 7.1. АБСОЛЮТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МИГРАЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ

Наиболее важными с практической точки зрения и базовыми для расчета аналитических характеристик миграционных процессов являются численность мигрантов, находящихся на данной территории в некоторый момент времени, и величина миграционных потоков на данную территорию (число прибывших) и из нее (число выбывших) за определенный временной интервал.

Систему миграционных перемещений между  $n$  территориальными единицами характеризует **матрица миграционных потоков** (шахматная таблица):

$$M = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n-1 1} & M_{n-1 2} & \dots & M_{n-1 n} \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

где  $M_{ij}(t)$  – общее количество миграционных перемещений (миграционный поток) с территории  $i$  на территорию  $j$  за определенный временной интервал  $t$ .

Сумма элементов матрицы по строкам равна общему миграционному оттоку из  $i$  (общее число выбывших из  $i$ )  $E = M_i = \sum_j M_{ij}$ .

<sup>81</sup> Например, в ряде стран мира не был осуществлен переход на критерии ВОЗ для определения живорождений. Однако, вероятные расхождения в данных (в несколько процентов) по рождаемости или младенческой смертности несопоставимы с теми расхождениями, которые наблюдаются при сравнении одних и тех же миграционных потоков в странах с разными статистическими определениями миграции (в несколько раз).

Сумма элементов матрицы по столбцам равна общему миграционному притоку в  $j$  (общее число прибывших в  $j$ )  $I = \mathbf{M}_j = \sum_i M_{ij}$ .

Шахматная таблица (1) может быть преобразована в две аналогичные по форме таблицы, отражающие структуру миграционных потоков в относительных величинах. Элементы одной из этих таблиц показывают, какую долю составляют выбывшие на территорию  $j$  среди всех мигрантов с территории  $i$ :

$$m_{ij} = M_{ij} / \mathbf{M}_i.$$

Элементы второй таблицы показывают, какую долю составляют прибывшие из  $i$  среди всех прибывших на территорию  $j$ :

$$m_{ij} = M_{ij} / \mathbf{M}_j.$$

Общее число мигрантов с территории  $i$  на территорию  $j$  можно разбить на подмножества по различным социально-демографическим критериям. Среди последних в первую очередь следует назвать возраст и пол, а также этническую принадлежность, уровень образования, профессию, семейное положение.

**Миграционный прирост** (сальдо миграции, нетто-миграция или чистая миграция)  $\Delta M_{ij}$  территории  $i$  за счет миграционного обмена с территорией  $j$  равен  $\Delta M_{ij} = M_{ji} - M_{ij}$ . От матрицы миграционных потоков легко можно перейти к матрице миграционного прироста, элементы которой составляют  $\Delta M_{ij}$ . Общий миграционный прирост территории  $i$  за счет миграционного взаимодействия со всеми другими территориями равен  $\Delta M_i = I_i - E_i = \mathbf{M}_i - \mathbf{M}_i$ . Миграционный прирост может также оцениваться косвенным образом на основе уравнения демографического баланса по данным текущего учета населения за период  $(t-k, t)$ :

$$\Delta M_{t-k,t} = (P_t - P_{t-k}) - (B_{t-k,t} + D_{t-k,t})$$

В правой части разность представляет собой общий прирост населения за период  $(k-1, k)$ , вычитаемое является естественным приростом населения. Если  $\Delta M_{t-k,t} < 0$ , то территория теряет население в результате миграционного обмена, если  $\Delta M_{t-k,t} > 0$ , то территория получает население в результате миграционного обмена.

Часто в выступлениях и публикациях, относящихся к миграционной тематике, величина миграционного прироста отождествляется с числом



	1	2	3	4	(5)=(1)-(2)	(6)=(3)-(4)	(7)=(5)-(6)
Ассам	671195	754821	44136	41785	+211153	-6035	+205118
Мадрас	97107	119621	580136	723755	+40966	-253845	-212879
Майсор	187000	204260	45349	54410	+53790	-17677	+35113
Бомбей	474553	480557	197593	202197	+96169	-42147	+54022

Источник: United Nation, *Methods of Measuring Internal Migration, Population Studies No 47, N.Y.*

## 7.2. ИЗМЕРЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ МИГРАЦИЙ

Влияние миграционных перемещений на численность населения выражается с помощью относительных мер – коэффициентов миграции. В традиционных общих коэффициентах миграции (коэффициенты миграционной активности или интенсивности) сопоставляются среднее годовое количество мигрантов со средней годовой численностью населения ( $P'$ ). Но в некоторых исследованиях, например, при расчете коэффициента вероятности эмиграции, целесообразно использовать частное от деления количества мигрантов на численность населения в начале года ( $P_t$ ).

Общие коэффициенты миграции:

**Коэффициенты выбытия** (эмиграции)  $K_e = C * E_{t,t+k} / P'_{t,t+k}$

**Коэффициент прибытия** (иммиграции)  $K_i = C * I_{t,t+k} / P'_{t,t+k}$ ,

где  $I_{t,t+k}$  – количество иммигрантов, а  $E_{t,t+k}$  – количество эмигрантов в течение периода ( $t, t+k$ );  $P'_{t,t+k}$  – средняя численность населения за период ( $t, t+k$ );  $C$  – константа (обычно берется равной 1, 100 или 1000).

**Коэффициент миграционного прироста** (сальдо миграции, нетто миграции) равен отношению:

$$K_{\Delta} = (I_{t,t+k} - E_{t,t+k}) / P'_{t,t+k} \text{ или } K_{\Delta} = K_i - K_e$$

Общий уровень подвижности населения на данной территории отражает **коэффициент миграционного оборота**:

$$K_{\Delta} = (I_{t,t+k} + E_{t,t+k}) / P'_{t,t+k} \text{ или } K_{\Delta} = K_i + K_e$$

**Коэффициент эффективности миграции** представляет собой отношение миграционного прироста к миграционному обороту:

$$K_{\Delta} = |I_{t,t+k} - E_{t,t+k}| / (I_{t,t+k} + E_{t,t+k})$$

Этот коэффициент равен единице, когда миграция полностью эффективна, т.е. миграционный поток имеет только одно направление.

Более детальную информацию о миграции содержат частные коэффициенты. В этом случае численность мигрантов, выделенных, например, по возрастным или профессиональным группам; относят к средней численности данной группы. Например, коэффициенты интенсивности миграции в возрасте  $x$  равны:

$$\text{Коэффициенты выбытия } K_e(x) = E_{t,t+k}(x) / P'_{t,t+k}(x)$$

$$\text{Коэффициент прибытия } K_i(x) = I_{t,t+k}(x) / P'_{t,t+k}(x)$$

Коэффициент миграционного прироста:

$$K_{\Delta}(x) = (I_{t,t+k}(x) - E_{t,t+k}(x)) / P'_{t,t+k}(x) \text{ или } K_{\Delta}(x) = K_i(x) - K_e(x)$$

Общий коэффициент миграции является средней взвешенной частных коэффициентов. Так, для возрастных коэффициентов  $K_{\Delta} = \sum K_{\Delta}(x) * (P'(x) / P')$ . Поскольку социально-демографические структуры взаимодействующих территорий могут значительно различаться, а интенсивность миграции дифференцируется по возрасту, полу, уровню образования и пр., то в сравнительном анализе миграционных процессов иногда следует использовать процедуру стандартизации (см. Раздел 2).

Как показывает статистика, различные социальные и демографические группы населения вовлечены в миграционные процессы в неодинаковой мере. Так, среди трудовых мигрантов на Крайний Север России преобладают молодые мужчины, миграционный поток в штат Флорида отличался в 1970-1980-х гг. повышенным удельным весом пожилых людей, в современных международных миграциях на длинные расстояния участвуют главным образом люди с высоким уровнем образования. В результате такого селективного характера миграционных процессов происходит изменение пространственных и социальных структур населения территорий, как принимающих мигрантов, так и их отдающих. Оценить направления «миграционного отбора» можно с помощью анализа соответствующих частных коэффициентов, о методах расчетов которых говорилось выше, а также с помощью индекса селективности миграции. Приведем два метода расчета этого индекса.

Пусть  $M_1, M_2, \dots, M$  – распределение мигрантов по социальным или демографическим группам в новом месте проживания;



(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(6) (8)	(6) (9)	) (10)	(11)	(7) (12)
Сельское хозяйство	19,2	7,3	26,5	1,46	3,24	1,72	-1,78	-55	2,62	-55	-103
Легкая промышленность	303,0	41,7	344,8	23,05	18,45	22,37	4,60	25	7,26	25	21
Химическая и металлообработка	249,5	54,2	303,7	18,98	23,95	19,71	-4,97	-21	4,61	-21	-25
Строительство	36,0	4,2	40,2	2,74	1,87	2,61	0,87	46	8,51	46	33
Торговля	240,9	45,8	286,7	18,32	20,23	18,60	-1,91	-9	5,26	-9	-10
Транспорт	152,2	28,2	180,3	11,57	12,45	11,70	-0,88	-7	5,40	-7	-8
Коммунальное хозяйство	19,2	5,2	24,4	1,46	2,31	1,59	-0,85	-37	3,67	-37	-53
Сфера обслуживания	292,1	39,0	331,1	22,21	17,25	21,48	4,96	29	7,49	29	23
Другое	2,6	0,6	3,2	0,20	0,26	0,21	-0,06	-	-	-	-
Всего	1314,7	226,2	1540,9	100	100	100			5,81		

Примечание: М – мигранты; N – немигранты; T – все население.

Источник: United Nation, *Methods of Measuring Internal Migration, Population Studies No 47, N.Y.*

Рассмотренные выше методы и коэффициенты характеризуют интенсивность миграционных процессов в одной территориально-административной единице или группе населения и не позволяют одновременно охватить всю совокупность миграционных потоков между многими населенными пунктами, регионами или странами. Для этого используются специальные показатели, в которых учитываются численности взаимодействующих групп населения.

Для измерения интенсивности миграционных процессов между территорией  $i$  и территорией  $j$  используют индекс **миграционный предпочтений**, который оценивается как отношение числа наблюдаемых мигрантов к числу ожидаемых мигрантов:

$$m_{ij} = M'_{ij} / M_{ij},$$

где  $M_{ij}$  – реально наблюдаемый поток мигрантов из  $i$  в  $j$ ;

$M'_{ij}$  – теоретический или ожидаемый поток мигрантов из  $i$  в  $j$ .

Величина  $M'_{ij}$  рассчитывается по формуле  $M'_{ij} = M \cdot P_i \cdot P_j / P^2$ , где  $M$  – общее количество мигрантов в изучаемой территориальной системе, включающей территории  $i$  и  $j$ ,  $P$  – общая численность населения этой территориальной системы. В основе этой формулы лежит гипотеза о том, что все административные единицы территориальной системы находятся в одинаковых условиях. В этом случае общая численность мигрантов  $M$  распределяется по потокам пропорционально численности населения взаимодействующих административных единиц. Можно оценить миграционные предпочтения жителей региона  $i$  без учета внутренних мигрантов  $M'_{ii}$  по формуле

$$M'_{ij} = M \cdot P_i \cdot P_j / (P \cdot (P - P_i)),$$

где  $i \neq j$ , а в  $M$  не включены внутренние мигранты.

Другой относительной мерой миграции является показатель **«скорость миграционного потока»**:

$$V_{ij} = P \cdot M_{ij} / P_i \cdot P_j \cdot C,$$

где  $M_{ij}$  – число эмигрирующих из пункта  $i$  в пункт  $j$ ,  $P$  – численность населения всей исследуемой территории;  $P_i, P_j$  – численность населения соответственно в местах  $i$  и  $j$ . Для оценки миграционного прироста между двумя регионами можно использовать показатель «скорость чистой миграции»

$$INV_{ij} = (M_{ji} - M_{ij}) \cdot \frac{P}{P_i \cdot P_j}.$$

Для общей характеристики интенсивности потоков между всеми элементами некоторой территориальной системы, состоящей из миграционных потоков  $M_{ij}$ , используются матрицы, элементами которых являются вышеприведенные показатели, например, индекс миграционных предпочтений:

$$PM = \begin{vmatrix} pm_{11} & pm_{12} & \dots & pm_{1n} \\ pm_{21} & pm_{22} & \dots & pm_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ pm_{n-1 1} & pm_{n-1 2} & \dots & pm_{n-1 n} \\ pm_{n1} & pm_{n2} & \dots & pm_{nn} \end{vmatrix}$$

В исследованиях межрегиональной миграции территориальные перемещения внутри региона  $M_{ii}$ , как правило, исключаются из расчетов,

поэтому в матрицах миграционных предпочтений  $m_{ij}$  принимается равной 0 или на ее месте ставится прочерк.

Для характеристики миграционной системы также используется матрица вероятностей миграционных переходов из  $i$  в  $j$ :

$$Pb = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1\ 1} & p_{n-1\ 2} & \dots & p_{n-1\ n} \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

где  $p_{ij} = M_{ij} / P_i$

Матрица вероятностей миграционного перехода является составляющей различных моделей миграции и прогнозов населения. Предположим, что численность населения регионов  $P_i$  в некоторой стране меняется только в результате миграции, а сами тенденции миграции – уровень и направление миграционных потоков – не изменяются. Тогда, умножая вектор-строку численности населения  $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$  на матрицу  $M$ , можно проследить, как сложившаяся структура миграционных потоков перераспределит население страны между ее  $n$  территориями через один год. Повторяя это процедуру несколько раз, можно найти численность населения  $P'_{t+k}$  через  $k$  лет:

$$P'_{t+k} = P_t * P^k.$$

## ЗАДАЧИ

### Задача 1

Пользуясь данными из Таблицы 2 Приложения 1, оцените годовые величины миграционного прироста в России за период 1989 – 2002 гг. Рассчитайте коэффициенты миграционного прироста. Чему был равен общий миграционный прирост в Российской Федерации за указанный период? Объясните динамику миграционного прироста и его коэффициентов в 1990-х гг.

### Задача 2

Основываясь на следующих данных, рассчитайте годовые абсолютные величины и коэффициенты миграционного прироста в США. Чему был равен общий миграционный прирост в США в 1990-х гг.? Сравните полученные результаты с российскими данными о миграции.

Годы	Численность населения (тыс.)	Общее число родившихся (тыс.)	Общее число умерших (тыс.)
1991	253493	4111	217
1992	256894	4065	2176
1993	260255	4000	2269
1994	263436	3953	2279
1995	266557	3900	2312
1996	269667	3891	2315
1997	272912	3881	2314
1998	276115	3942	2337
1999	279295	3959	2391
2000	282339	4059	2403
2001	285024	4028	2419

Источник: U.S. Census Bureau, Statistical Abstract of the United States: 2002. Washington, 2003.

### Задача 3

Число прибывших и выбывших по данным текущего учета миграционного движения в Российской Федерации за 1989-2002 гг. представлены в следующей таблице:

годы	Прибывшие в Российскую Федерацию	Выбывшие из Российской Федерации
1982	876574	723120
1983	892536	720719
1984	898563	708774
1985	877131	705080
1986	957460	721856
1987	894048	773921
1988	874185	791857
1989	854590	739297
1990	913223	729467
1991	692238	675497
1992	926020	673143
1993	923280	483028
1994	1146735	337121
1995	842050	339600
1996	631592	288048
1997	583260	234284

1998	495304	216691
1999	367197	237967
2000	350876	161046
2001	193450	121166
2002	184612	106685

Зная данные о численности родившихся и умерших за этот период, а также численность населения по данным переписей населения 1989 и 2002 года (см. Приложение 1), оцените величину недоучета численности мигрантов в России. Объясните природу найденной ошибки.

Указание: при решении задачи необходимо принять во внимание точную дату проведения переписи населения.

#### Задача 4

Используя информацию об общих итогах миграционного движения для городской и сельской местности за 1994 год – год максимального миграционного прироста в России, – и сведения о численности населения (Приложение 1), рассчитайте:

- долю каждого вида миграционных перемещений в общих потоках в городской и сельской местности;
- миграционный прирост по каждому виду миграционных перемещений в городской и сельской местности;
- коэффициенты миграционной активности по каждому виду миграционных перемещений;
- коэффициенты миграционного оборота и эффективности миграции;
- сравните полученные результаты.

	Городские поселения.		Сельские поселения	
	число прибывших	число выбывших	число прибывших	число выбывших
Миграция – всего				
из нее:	4293,9	3427,8	3971,7	3559,5
в пределах России				
в том числе:	3017,0	2985,2	2902,8	2967,2
Внутрирегиональная	1544,9	1554,1	1511,3	1541,4
Межрегиональная	1472,1	1431,1	1391,5	1425,8
Международная				
В том числе:	1191,4	345,6	979,3	493,1

со странами СНГ и Балтии	1146,3	231,8	922,9	369,1
с другими зарубежными странами	45,0	113,9	56,4	124,0

Источник: Госкомстат РФ. Численность и миграция населения в Российской Федерации в 1994 году.

### Задача 5

Основываясь на данных переписей населения 1989 и 2002 гг. о месте рождения и постоянного проживания, оцените миграционный прирост четырех субъектов федерации за счет обмена с другими регионами России. Прокомментируйте полученные результаты.

Регион	Численность уроженцев других регионов, проживающих в данном регионе		Численность уроженцев региона, проживающих за его пределами	
	1989	2002	1989	2002
	1	2	3	4
Москва	3340,9	3299,0	474,6	545,7
Республика Коми	408,7	251,9	166,4	190,7
Краснодарский край	1163,4	1134,3	849,6	761,6
Республика Тыва	49,1	22,7	35,4	51,9

### Задача 6

Проанализируйте данные по причинам выезда/въезда в Российскую Федерацию из некоторых стран мира в 2001 году. Вычислите величину миграционного прироста по отдельным причинам. Насколько удачна классификация причин?

Международная миграция - страны	Число мигрантов в возрасте 16 лет и старше	в том числе сменили место жительства по причине								
		учебы	работы	возвращения к прежнему месту жительства	обострения межнациональных отношений	обострения криминальной обстановки	экологического неблагополучия	несоответствия природно-климатических условий	личные, семейные	иные
Прибывшие	160870	5873	13069	17813	12250	782	505	496	101781	8301
Белоруссия	5500	328	455	1343	14	3	23	17	3036	281
Казахстан	53469	1674	4186	4112	6086	294	299	178	34083	2557
Молдавия	6418	245	616	748	270	18	6	12	4120	383
Украина	30789	997	2754	5968	237	21	72	63	19164	1513
Государства Закавказья	17571	508	1633	683	572	78	12	32	12994	1059
Государства	38466	861	2971	3542	4933	359	86	163	23657	1894

Средней Азии											
Государства Балтии	2225	69	110	259	120	3	2	1	1527	134	
Германия	1412	14	43	494	1	-	2	14	728	116	
Израиль	1128	20	23	375	4	-	-	11	601	94	
Китай	395	267	66	1	1	-	-	-	49	11	
Канада	65	2	4	15	-	-	-	-	34	10	
США	361	29	22	61	-	1	-	3	188	57	
Выбывшие	97454	1890	4951	16683	165	29	121	371	67234	6010	
Белоруссия	9420	494	647	2162	6	3	19	47	5655	387	
Казахстан	12476	354	1413	4160	49	3	5	72	5971	449	
Молдавия	1358	38	90	521	3	-	1	11	596	98	
Украина	20005	481	1113	5579	29	2	33	113	11720	935	
Государства Закавказья	3993	49	187	1560	7	1	2	7	1756	424	
Государства Средней Азии	3927	77	367	1406	32	1	8	27	1812	197	
Государства Балтии	828	11	30	154	1	-	-	1	591	40	
Германия	34131	88	492	305	26	15	29	60	30708	2408	
Израиль	3941	127	142	107	3	2	18	23	3187	332	
Канада	610	8	61	2	3	-	4	3	428	101	
Китай	154	8	8	112	-	-	-	-	24	2	
США	2974	40	132	49	6	2	1	4	2359	381	

Источник: Госкомстат РФ. Численность и миграция населения в Российской Федерации в 2001 году

### Задача 7

На основе данных о возрастном-половом составе мигрантов в Российской Федерации в 2001 году:

- сравните возрастной состав мигрантов по каждому виду миграционного потока;
- сравните возрастную структуру всех прибывших и выбывших с возрастной структурой населения России;
- оцените миграционный прирост по возрастным-половым группам.

Сравните результаты, полученные для каждого миграционного потока.

Возраст	Прибывшие		Выбывшие	
	из стран СНГ и Балтии	из других зарубежных стран	в страны СНГ и Балтии	в другие зарубежные страны
Всего мужчин	87421	4368	31759	27042
0 – 5	4632	158	1702	2173
6 – 13	9094	191	2973	3439
14 – 17	5555	161	1948	2457
18 – 19	2447	275	1145	1067
20 – 24	8146	613	3722	2761
25 – 29	9373	700	3441	2673

30 – 39	16175	1082	6770	4209
40 – 49	13587	551	4978	4050
50 – 54	5053	192	1609	1206
55 – 59	2548	114	795	452
60 – 64	4581	135	1238	1033
65 и старше	6230	196	1438	1522
Всего женщин	98805	2856	30786	31579
0 – 5	4320	156	1617	2047
6 – 13	8517	184	2758	3283
14 – 17	5366	136	1666	2329
18 – 19	2768	159	1331	1298
20 – 24	8175	384	3885	3602
25 – 29	8659	324	3582	3273
30 – 39	14588	459	5310	5223
40 – 49	14604	347	3458	4715
50 – 54	7256	182	1268	1425
55 – 59	4324	126	833	678
60 – 64	7218	150	1367	1373
65 и старше	13010	249	3711	2333

Источник: Госкомстат РФ. Численность и миграция населения в Российской Федерации в 2001 году.

#### Задача 8

Пользуясь условиями предыдущей задачи и оценками численности возрастно-половых групп населения России (Приложение 1), вычислите коэффициенты интенсивности миграции и миграционного прироста по отдельным потокам для возрастно-половых групп. Постройте графики возрастных интенсивностей миграции. Проанализируйте полученные результаты.

#### Задача 9

Имеются следующие данные по возрастно-половым характеристикам населения и миграционных потоков на Крайнем Севере России в 1996 году:

Возраст	Все население (тыс. человек)		Все прибывшие (тыс. человек)		Все выбывшие (тыс. человек)	
	Мужчины	женщины	мужчины	женщины	мужчины	женщины
0-4	282898	269044	6955	6387	6392	6305
5-9	435545	412671	6650	6332	9905	9716
10-14	510860	493035	4977	4698	9496	8583
15-19	433925	421232	6952	8652	13540	15077

20-24	422677	386421	23668	16932	15214	13403
25-29	397134	337113	14842	10429	13483	10199
30-34	460167	407525	11366	7516	14313	10842
35-39	548375	502485	9970	6560	14673	11308
40-44	494452	478318	7203	5509	11154	9150
45-49	394309	398399	5253	4926	8467	7235
50-54	178863	188449	2457	2419	4324	5776
55-59	251745	293845	3261	3642	8402	8002
60-64	148543	201378	1437	2237	3034	3074
65-69	117550	193414	1120	2291	1483	2400
70-74	53330	140999	564	1742	518	1560
75-79	20958	69044	257	967	207	732
80+	18618	76991	262	1129	197	964
Не указан			6	1	6	4
Всего	5169949	5270363	107200	92369	134808	124330

Источник: данные Госкомстата РФ.

- Рассчитайте миграционный прирост в отдельных возрастно-половых группах;
- Оцените коэффициенты миграционной активности по отдельным возрастно-половым группам;
- Сравните возрастно-половые структуры мигрантов и всего населения;
- Объясните возрастные особенности миграции на Крайнем Севере.

#### Задача 10

Докажите, что методы 1 и 2 вычисления индекса селективности идентичны.

#### Задача 11

По данным таблицы задачи 8 и Приложения 1 оцените индексы миграционной селективности возрастных групп в России.

#### Задача 12

Даны возрастные характеристики миграционных потоков в Германии и Швейцарии за 1997 год (в тыс.человек).

Страна	Всего	0-4	5-14	15-19	20-24	25-39	40-64	65+
Германия								
Иммиграци	840,6	37,6	78,7	68,4	153,3	311,2	166,0	25,4

я								
Эмиграция	747,0	28,8	59,3	36,5	106,8	315,4	177,1	23,1
Швейцария								
Иммиграция	62,0	3,1	3,8	2,5	5,0	12,0	4,9	0,6
Эмиграция	21,3	1,7	2,4	1,4	3,3	7,7	4,2	0,5

- оцените величины миграционного прироста для отдельных возрастных групп;
- сравните возрастные особенности миграционных потоков в обеих странах.

### Задача 13

На основе данных учета миграционных перемещений в 2001 году была получена следующая шахматная таблица:

Федеральные округа	Российская Федерация	Центральный	Северо-Западный	Южный	Приволжский	Уральский	Сибирский	Дальневосточный
Российская Федерация	2140584	450908	201073	306242	447311	214213	388607	132230
Центральный	378335	305546	19996	15581	17087	7150	7413	5562
Северо-Западный	194479	28033	138715	8019	11177	3324	3096	2115
Южный	318135	31852	10677	237759	13488	12474	7463	4422
Приволжский	460830	32856	12832	13675	360811	27847	8226	4583
Уральский	210749	13287	5376	10275	24534	146218	9077	1982
Сибирский	414668	19227	7221	11843	11896	13668	340367	10446
Дальневосточный	163388	20107	6256	9090	8318	3532	12965	103120

- Как распределяются выбывшие и прибывшие в федеральные округа в относительных величинах (в %)?
- Постройте матрицу миграционного прироста.
- Дайте интерпретацию полученным результатам.

### Задача 14\*

Объясните природу показателя миграционных предпочтений с точки зрения теории вероятностей.

### Задача 15

Используя данные Задачи 13 и данные о средней численности населения федеральных округов России, постройте матрицу миграционных предпочтений.

Дайте интерпретацию полученным результатам.

Указание: исключите из расчетов внутреннюю миграцию.

Федеральные округа	Средняя численность населения в 2001 году (тыс.человек)
Российская Федерация	144386,8
Центральный	36609,9
Северо-Западный	14315,4
Южный	21497,2
Приволжский	31740,7
Уральский	12542,4
Сибирский	20608,6
Дальневосточный	7072,6

#### *Задача 16*

На основе данных Задачи 13 постройте полную матрицу (с учетом внутренней миграции) вероятностей миграционных переходов для 2001 года. Проанализируйте полученные результаты.

Предполагая, что численность населения федеральных округов будет изменяться только в результате миграционных перемещений, а матрица вероятностей перехода не изменится, оцените, как перераспределится численность между регионами к 2005 году.

#### *Задача 17*

На основе данных матрицы миграционных потоков для ряда стран Европейского союза за 1998 год:

- получите относительные распределения выбывших и прибывших по странам;
- постройте матрицу миграционного прироста;
- сравните полученные результаты.

	Германия	Греция	Дания	Испания	Италия	Нидерланды	Великобритания	Швеция	Финляндия
Германия	-	1094	3795	6836	7964	9475	11800	1924	518
Греция	17305	-	210	47	848	880	10000	414	64
Дания	3087	148	-	238	241	495	3000	1627	365
Испания	12174	40	1193	-	1298	2350	700	572	219
Италия	41557	456	862	1557	-	1645	3000	482	114
Нидерланды	10941	269	934	1108	692	-	11000	497	108
Великобритания	16477	975	3934	3554	2407	5940	-	1630	426
Швеция	4074	251	2672	437	469	700	3000	-	3274
Финляндия	3227	110	381	381	226	405	3000	3096	

### Задача 18

Используя данные о миграции из Задачи 17 и приведенные ниже данные о средней численности населения европейских стран, постройте матрицу миграционных предпочтений и матрицу скорости миграции миграционных потоков.

	Численность населения в 1998 году (тысяч человек)
Германия	82057
Греция	10487
Дания	5295
Испания	39348
Италия	57461
Нидерланды	15654
Великобритания	58185
Швеция	8848
Финляндия	5147

Дайте интерпретацию полученным результатам. Являются ли показатели миграционных предпочтений и скорости миграционного потока взаимозаменяемыми?

### РЕШЕНИЯ

Решение Задачи 14

Пусть  $P$  – численность населения некоторой страны,  $P_i$  – численность  $i$ -го региона, а  $M$  – общая численность межрегиональных мигрантов в этой стране. Предполагая, что вероятность выбытия из региона пропорциональна его удельному весу в общей численности населения страны, можно вычислить численность выбывших из региона  $i$  по формуле  $M_i = M * P_i / P$ . Тогда число прибывших в регион  $j$  из  $i$  будет равна

$$M_{ij} = M_i * P_j / P = M * P_i P_j / P^2$$

Найденная величина представляет собой теоретическое значение миграционного потока  $M_{ij}$ , которое могло бы наблюдаться при условии, что факторы миграции во всех регионах страны действуют равнозначно. Следовательно, объемы и направления миграционных потоков задаются различиями между регионами в численности населения. Отклонение от этой теоретической величины представляет меру предпочтения мигрантами того или иного региона страны.

## РАЗДЕЛ 8. ТАБЛИЦЫ МНОЖЕСТВЕННОГО ВЫБИТИЯ

Демографические таблицы – это теоретические модели, описывающие жизнь когорты как последовательность переходов между двумя или несколькими четко различимыми состояниями, не обязательно демографическими.

### Схема классификации демографических таблиц:

Одномерные таблицы, таблицы выбытия ( <i>decrement</i> )		Мультистатусные ( <i>multistate</i> ), многомерные таблицы ( <i>increment-decrement</i> )		
Единственного выбытия ( <i>single decrement</i> ), обыкновенные ( <i>basic</i> ), чистые	Множественного выбытия ( <i>multiple-decrement</i> ), комбинированные	Специальные мультистатусные		Мультистатусные таблицы общего вида
		последовательные	иерархические	
Специальные демографические таблицы				Общие

Многие демографические таблицы описывают переходы в особое состояние (или несколько состояний), которые не допускают дальнейших переходов, т.е. *поглощающие (absorbing)* состояния.

*Одномерная (одностатусная)* таблица – описывает процесс только с одним непоглощающим состоянием. Если она также ограничивается лишь одним поглощающим состоянием, то это таблица *единственного выбытия*. Таковы таблица смертности, таблица порядков рождений, чистая таблица первой брачности.

Если в таблице присутствует несколько поглощающих состояний, то это таблица *множественного выбытия*. Например, таблица смертности по причинам, комбинированные таблицы первой брачности и разводимости.

*Многомерные (мультистатусные)* таблицы различают несколько непоглощающих состояний. Мультистатусная таблица является естественной моделью жизни когорты, состоящей из нескольких четко различимых групп населения, т.е. неоднородной (дифференцированной по состояниям) когорты. Это может быть территориальная структура (группы населения регионов),

социальная или образовательная структура, группы занятого или незанятого населения, группы, различающиеся семейным или брачным состоянием, профессией, знанием языков и т.д. В большинстве случаев между группами населения существуют весьма интенсивные переходы (миграция, изменение уровня образования, поступление или уход с работы, браки, разводы и т.д.). Таким образом, необходима модель, описывающая движение связанных групп в совокупности, учитывающая переходы между ними, т.е. *мобильность* (в широком смысле) населения.

Такая модель называется *многомерной (мультистатусной) таблицей*. Это общая модель движения от возраста к возрасту неоднородного поколения.

Первая мультистатусная таблица смертности появилась в работе по страхованию на случай потери трудоспособности, автором которой был Дюпакье (1912). В этой работе использовалась модель с двумя активными состояниями: здоров и болен. Далее последовал ряд работ Депуа (1938), Фикса и Неймана (1951), Чанга (1964). Более широкое распространение мультистатусные модели получили с появлением ЭВМ. Одним из основоположников мультистатусных моделей считают американского демографа А. Роджерса<sup>82</sup>. Он предложил считать все демографические таблицы частным случаем многомерной таблицы смертности и применил данный подход к анализу территориальной мобильности населения. Соответственно многомерные таблицы называются в этом случае также межрегиональными таблицами смертности или многомерными таблицами миграции.

Методология анализа, а также методология построения, включая формальные соотношения, переносится из случая одномерной таблицы единственного выбытия (обыкновенной таблицы) почти буквально. Эта методология, однако, применяется к матрицам, а не к числам. Каждая переменная обыкновенной таблицы имеет свой матричный аналог.

В отличие от таблицы единственного выбытия (см. Раздел 3), таблица множественного выбытия описывает взаимодействие двух или нескольких

---

<sup>82</sup> Rogers A. Introduction to multiregional mathematical demography. N.-Y. 1975; Rogers A. Essays in multistate mathematical demography. IIASA, Laxenburg, 1980; Rogers A. Multiregional demography. Principles, methods and extensions. John Wiley, 1995.

процессов, каждый из которых ведет к выбыванию индивида из исходной когорты. Например, к таблицам множественного выбытия относятся таблицы, комбинированные таблицы смертности и миграции, смертности и первой брачности, первой брачности и разводимости, смертности по причинам и т.п.

При построении демографической таблицы для двух процессов предполагается, что эти процессы «конкурируют» между собой, риски наступления событий, относящихся к тому или иному процессу, можно считать «конкурирующими» рисками. Например, если существует «выбор» вступления в первый брак на данной территории или миграции за ее пределы, то эти два исхода можно считать конкурирующими рисками, а каждый из процессов будет в некотором смысле помехой для реализации другого процесса. Еще более наглядно эту ситуацию можно представить в случае изучения смертности по причинам смерти: смерть от сердечно-сосудистого заболевания является «конкурирующей» причиной смерти от новообразования и т.п.

Демографический процесс можно считать помехой для данного изучаемого процесса, если в течение периода наблюдения он изменяет наблюдаемую численность населения, путем добавления к нему или вычитания из него индивидов. Если население выбывает из-под наблюдения, мы не можем учесть те события, относящиеся к интересующему нас процессу, которые наступили позже (эмиграция) или не наступили вовсе (смертность). Если бы не было «помехи», эти события были бы зарегистрированы, т.к. относились бы к исходному населению.

Если население добавляется к исходному (иммиграция), то регистрируются те события, которые в ситуации «без помех» не произошли бы, так как не относятся к начальному, или исходному, населению.

Пример: изучение смертности в открытом населении.

- в случае эмиграции смерти эмигрантов не регистрируются;
- в случае иммиграции регистрируются смерти приезжих, не относящихся к исходному населению.

Таблицы множественного выбытия (комбинированные таблицы) описывают совместное действие нескольких процессов, при этом в таблице имеются показатели, описывающие как совместное действие процессов, так и

показатели, описывающие действие каждого процесса в отдельности. На основе таблицы множественного выбытия строится чистая таблица, показатели которой описывают один из процессов в «чистом виде», то есть в отсутствие другого процесса. При этом предполагают, что все рассматриваемые процессы независимы.

### 8.1. КОМБИНИРОВАННАЯ ТАБЛИЦА: БРАЧНОСТЬ И СМЕРТНОСТЬ

*Изучаемый процесс:* вступление в брак без учета очередности брака.

*Помеха:* смертность тех, кто не состоит в браке.

Рассмотрим ситуацию, при которой наблюдается совместное действие двух процессов: вступление в брак и смертность не состоящих в браке. Обозначим через  $C_x$  не состоящих в браке в возрасте  $x$ ,  $M_x$  – число браков в возрасте  $x$ ,  $D_x$  – смерти не состоящих в браке в возрасте  $x$ . Если бы смертность отсутствовала, браков в возрасте  $x$  лет было бы больше, чем  $M_x$ , поскольку часть умерших в этом возрасте могла бы вступить в брак. Обозначим  $M'_x$  эти «дополнительные» браки. Тогда вероятность вступить в брак в возрасте  $x$  лет будет равна:

$$n_x = \frac{M_x + M'_x}{C_x}.$$

Если принять, что и браки, и смерти распределены равномерно в возрастном интервале  $(x, x+1)$  и в среднем имеют место в середине интервала, то «дополнительное» число браков будет равно:

$$M'_x = D_x \frac{n_x}{2}, \quad \text{откуда} \quad n_x = \frac{M_x}{C_x - \frac{D_x}{2}}.$$

скорректированную или чистую вероятность вступить в брак с учетом смертности не состоящих в браке. При расчете этой вероятности принималась гипотеза о том, что смертность не состоящих в браке и вступление в брак – независимые процессы (*условие независимости*), другими словами, что умирающие при отсутствии помехи (смертности) могли бы с такой же вероятностью вступить в брак, как и те, кто остался жив.

## 8.2. КОМБИНИРОВАННАЯ ТАБЛИЦА: ВСТУПЛЕНИЕ В ПЕРВЫЙ БРАК И СМЕРТНОСТЬ

*Изучаемый процесс:* вступление в 1<sup>й</sup> брак.

*Помеха:* смертность тех, кто не состоит в браке.

Введем следующие обозначения:

$n_j$  – вероятность вступления в брак в интервале точного возраста от  $i$  до  $i+1$  при отсутствии смертности одиноких.

$q_j$  – вероятность умереть в интервале точного возраста от  $i$  до  $i+1$  для одиноких при отсутствии брачности.

$S_i, S_{i+1}$  – численности одиноких в точном возрасте  $i$  и  $i+1$

$\mu_i$  – число первых браков, фактически зарегистрированных в интервале от  $i$  до  $i+1$

$\delta_i$  – число смертей одиноких, фактически зарегистрированных в интервале возраста от  $i$  до  $i+1$

Если удовлетворяется условие независимости между брачностью и смертностью одиноких, то есть если отсутствует селекция<sup>83</sup>, можно записать:

$$S_{i+1} = S_i(1 - n_i)(1 - q_i) \quad (1),$$

где:

$(1 - n_i)$  – вероятность не вступить в брак для одиноких в интервале от  $i$  до  $i+1$

$(1 - q_i)$  – вероятность не умереть для одиноких в интервале от  $i$  до  $i+1$

Если бы не было брачности, число смертей одиноких было бы равно  $S_i \cdot q_i$ .

Но брачность «предотвращает» смертность некоторого числа одиноких. В среднем можно принять, что вероятность вступления в брак этих  $S_i \cdot q_i$  одиноких, умерших в одиночестве при отсутствии брачности, равен  $0,5n_j$  (если браки или смерти равномерно распределены в возрастном интервале при отсутствии одного из этих процессов.)

<sup>83</sup> Умершие одинокие, если бы они были живы, вступали в брак точно так же, как и те, кто выжил. И наоборот, вступающие в брак одинокие умирают таким же образом как и не вступающие в брак, если бы последние в него вступили

Тогда  $(S_i \cdot q_i) \cdot 0,5n_i$  женщин на самом деле вступают в брак, и реальное число смертей одиноких оказывается равно:

$$\delta_i = S_i \cdot q_i - (S_i \cdot q_i)0,5n_i = S_i \cdot q_i(1 - 0,5n_i)$$

Реальное число первых браков будет равно:

$$\mu_i = (\mu_i + \delta_i) - \delta_i = (S_i - S_{i+1}) - S_i q_i \left(1 - \frac{1}{2} n_i\right),$$

так как  $S_i$  уменьшается за счет браков и смертей одиноких в интервале от  $i$  до  $i+1$ .

Используя выражение (1), запишем:

$$\mu_i = S_i - S_i(1 - n_i)(1 - q_i) - S_i q_i(1 - 0,5n_i) = S_i n_i(1 - 0,5q_i)$$

В итоге:

$$\mu_i = S_i n_i(1 - 0,5q_i)$$

$$\delta_i = S_i q_i(1 - 0,5n_i) \quad (2a)$$

или в общем виде, где  $0 < \alpha < 1$

$$\mu_i = S_i n_i(1 - q_i(1 - \alpha))$$

$$\delta_i = S_i q_i(1 - \alpha n_i) \quad (2b)$$

Если отсутствуют различия в смертности одиноких и когда-либо состоявших в браке (условие однородности), то фактические вероятности вступления в брак могут считаться вероятностями вступления в брак для «чистого состояния», то есть при отсутствии помех. Этот вывод носит общий характер и приложим ко всем неповторяющимся событиям процессов, не исключающих население из-под наблюдения (рождаемость, брачность).

Например, наблюдаемые относительные частоты (например, повозрастные коэффициенты рождаемости по очередности рождений) всегда получают делением фактического числа событий на среднюю численность когорты, среди членов которой и имеющие, и не имеющие детей. При этом предполагается отсутствие помех.

*Если неоднородность населения по отношению к изучаемому процессу существенна, нельзя использовать фактические коэффициенты для оценки интенсивности и календаря процесса. Необходимо ввести поправки на «помехи».*

Вероятность вступления в первый брак с учетом смертности равна

$$n_i = \frac{\mu_i}{S_i - 0,5 \cdot S_i \cdot q_i}, \quad \text{число умирающих} \quad \text{и} \quad S_i \cdot q_i = \frac{\delta_i}{(1 - 0,5 \cdot n_i)} \quad \text{или}$$

$$0,5 \cdot S_i \cdot q_i = \frac{\delta_i}{(2 - n_i)}. \quad \text{Отсюда получим уравнение:}$$

$$-S_i \cdot n_i^2 + (2 \cdot S_i - \delta_i + \mu_i) \cdot n_i - 2 \cdot \mu_i = 0, \quad \text{для которого есть решение при } 0 \leq n_i \leq 1:$$

1) «точная формула Берксона» («exact Berkson formula»):

$$n_i = 1 + 0,5 \cdot \left( \frac{\mu_i}{S_i} - \frac{\delta_i}{S_i} \right) - \sqrt{\left( 1 + 0,5 \cdot \left( \frac{\mu_i}{S_i} - \frac{\delta_i}{S_i} \right) \right)^2 - 2 \cdot \frac{\mu_i}{S_i}}$$

2) Приближенная формула Ле Браса (Le Bras) и Артсруни (Artzrouni):

$$n_i \approx \frac{\mu_i}{S_i} \cdot \left( 1 - \frac{\delta_i}{\mu_i + \delta_i - 2 \cdot S_i} \right) \quad \text{или} \quad n_i \approx \frac{\mu_i}{S_i} \cdot \left( 1 + \frac{\delta_i}{S_i + S_{i+1}} \right), \quad \text{так как}$$

$$\mu_i + \delta_i = S_i + S_{i+1}$$

3) Еще более приближительную формулу для исключения влияния помех называют «приближенной формулой Берксона» («approximate Berkson formula»):

$$n_i \approx \frac{\mu_i}{S_i - 0,5 \cdot \delta_i}$$

Вместо скорректированных вероятностей можно использовать коэффициенты. Этот подход имеет преимущества в том случае, если отсутствуют данные о доживших до точного возраста  $i$ , но есть данные о числе живущих в возрасте  $i$  исполнившихся лет (например, если данные получены из переписей или выборочных обследований).

Тогда вместо оценки доживающих до точного возраста  $i$  и расчета вероятностей можно рассчитать соответствующие коэффициенты и затем преобразовать их в вероятности.

Пример:

Дано:

$S_i$  – число одиноких, доживших до точного возраста  $i$ ;

$\delta_i$  – число смертей одиноких, фактически зарегистрированных между  $i$  и  $i+1$ ;

$\mu_i$  – число первых браков, фактически зарегистрированных между  $i$  и  $i+1$ .

$q_i \approx \frac{\delta_i}{S_i - 0,5\mu_i}$  – приблизительная оценка вероятности умереть в чистом

виде с учетом брачности одиноких;

$t_i \approx \frac{\delta_i}{S_{i+0,5}}$  – расчет коэффициента смертности

Если выполняется условие независимости и условие равномерного распределения событий в интервале от  $i$  до  $i+1$ ,  $S_{i+0,5} = S_i - 0,5\delta_i - 0,5\mu_i$ ,

получим  $q_i \approx \frac{\delta_i}{S_{i+0,5} + 0,5\delta_i} \approx \frac{2\delta_i}{2S_{i+0,5} + \delta_i}$ .

Разделив числитель и знаменатель на  $S_{i+0,5}$ , получим  $q_i \approx \frac{2t_i}{2 + t_i}$ .

Преимущество такого подхода в том, что он не требует информации о числе событий-помех. Если же мы используем расчет вероятностей, число помех появляется в знаменателе «скорректированной» вероятности. В случае неравномерного распределения событий в интервале, формулой линейного выбытия индивидов из когорты пользоваться нельзя. Когда изучаемые события распределены равномерно, а помехи – нет, надо «скорректированным» вероятностям предпочесть коэффициенты, т.к. они требуют меньше данных.

Когда функция дожития нелинейна и для изучаемого процесса, и для помехи, лучше использовать формулу вида  $q_i = \frac{\delta_i}{S_i - \alpha \cdot \mu_i}$  при  $\alpha$ , отличном от

0,5. Поскольку значение  $\tau$  трудно оценить, необходимо использовать короткие временные интервалы: нелинейность будет ярче выражена в интервале от  $i$  до  $i+20$ , чем от  $i$  до  $i+1$ .

### 8.3. ТАБЛИЦЫ СМЕРТНОСТИ ПО ПРИЧИНАМ СМЕРТИ

Таблицы смертности по причинам смерти представляют собой дальнейшее развитие таблиц смертности. Обычно строят краткие таблицы смертности по причинам, в связи с тем, что число смертных случаев от ряда

причин в отдельных возрастных группах может быть незначительным. Расчет показателей таблиц смертности по причинам основан на предположении, что интенсивность смертности от некоторой причины в данном возрасте не зависит от смертности от других причин в более молодых возрастах.

В таблицах смертности по причинам присутствуют следующие группы показателей:

1) Показатели, измеряющие фактический уровень смертности от отдельных причин:

$m_x^j$  – коэффициент смертности в возрасте  $x$  от отдельной причины смерти  $j$ ;

$q_x^j$  – вероятность умереть в возрасте  $x$  от отдельной причины смерти  $j$ ;

$d_x^j$  – числа умирающих в возрасте  $x$  от отдельной причины смерти  $j$ ;

$l_x^j$  – доживающих до возраста  $x$  лет в совокупности лиц, которые когда-либо умрут от отдельной причины смерти  $j$ ;

$e_0^j$  – средний возраст смерти от данной причины  $j$  или ожидаемая продолжительность жизни совокупности лиц  $l_0^j$ ;

$Q^j = \frac{l_0^j}{l_0}$  – вероятность для новорожденного умереть от  $j$  причины.

2) Чистые показатели таблиц смертности:

$q_x^{*j}$  – вероятность смерти от отдельной причины;

$l_x^{*j}$  – числа доживающих.

Если сумма фактических вероятностей умереть от всех причин равна общей вероятности смерти, то чистые вероятности смерти, благодаря предположению о независимости вероятностей умереть от разных причин, подчиняются следующему соотношению:

$q_x = 1 - (1 - q_x^{*1})(1 - q_x^{*2}) \dots (1 - q_x^{*n})$ , где  $n$  – число причин смерти. При  $n=2$  чистая вероятность смерти от двух причин в возрасте  $x$  равна  $q_x = q_x^{*1} + q_x^{*2} - q_x^{*1} q_x^{*2}$ , где третье слагаемое выражает невозможность умереть одновременно от двух причин. Все остальные показатели вычисляются на основе чистых вероятностей умереть.

3) Гипотетические показатели:

$q_x^{-j}$  – вероятность умереть, характеризующая интенсивность уменьшения смертности в возрасте  $x$  при устранении причины смерти  $j$ ;

$d_x^{-j}$  – числа умирающих в возрасте  $x$  при устранении смертности от причины  $j$ ;

$l_x^{-j}$  – доживающих до возраста  $x$  лет при устранении смертности от причины  $j$ ;

$e_0^{-j}$  – прирост ожидаемой продолжительности жизни по сравнению с общей продолжительностью жизни при устранении смертности от причины  $j$ .

При наличии двух причин смерти  $q_x = q_x^{*j} + q_x^{*-j} - q_x^{*j} q_x^{*-j}$ , откуда

$$q_x^{*-j} = \frac{q_x - q_x^{*j}}{1 - q_x^{*j}} - \text{вероятность смерти при устранении причины } j \text{ равна}$$

чистой вероятности смерти от всех причин, кроме  $j$ .

### 8.3.1. Таблица смертности от одной из причин

Для каждого возраста  $x$  и болезни  $j$  можно рассчитать доли  $w_{xj}$ , которые занимает в общей смертности возраста  $x$  смертность от причины  $j$ . Для этого достаточно иметь распределение умерших по возрасту и по причинам смерти. При этом  $\sum w_{xj} = 1$ . По этим же долям можно распределить числа умирающих таблицы смертности:

$$d_x = \sum_j w_{xj} d_x = \sum_j d_{xj}.$$

Для причины  $j$  получим ряд чисел умирающих от этой причины  $d_{0j}, d_{1j}, \dots$ , сумма членов которого не равна 1. Построенная таким образом таблица смертности не приведет к полному исчезновению исходной численности поколения. Вместо ожидаемой продолжительности жизни в данной таблице мы можем рассматривать средний возраст смерти от изучаемой причины, как если бы существовала только эта единственная причина смерти.

### 8.3.2. Таблица смертности от всех причин при условии исключения одной причины

В составе  $d_x$  есть часть  $w_{jx}d_x$  умирающих от исключенной причины, и часть  $(1-w_{jx})d_x$  умирающих от всех прочих причин. Рассматривая умерших от исключаемой причины как выбывших из-под наблюдения, введем поправку, аналогичную поправке на миграцию. При этом вводится предположение о независимости причин смерти. Получим условную вероятность смерти в возрасте  $x$  при исключении причины  $j$ :

$$q_x^{(j)} = \frac{(1-w_{jx})d_x}{l_x - 0,5d_x w_{jx}},$$

или после деления числителя и знаменателя на  $l_x$  получим:

$$q_x^{(j)} = \frac{(1-w_{jx})q_x}{1-0,5q_x w_{jx}}$$

При этом предполагается, что все умершие от данной причины умирают в середине соответствующего возрастного интервала.

Пример: численность возрастной группы «60 лет» равна 50000. В этой группе между точными возрастами 60 и 61 год зарегистрировано 400 смертей от рака и 650 смертей от всех прочих причин.

Вероятность умереть при отсутствии смертности от рака была бы равна:  $650/(50000-400/2)=13,05\%$ .

Вероятность умереть от всех причин:  $1050/50000=21,0\%$ .

На основе полученного ряда  $q_x^{(j)}$  условных вероятностей смерти при исключении причины  $j$  можно рассчитать все остальные показатели таблицы смертности, включая ожидаемую продолжительность предстоящей жизни, которая будет больше  $e_0$  в обычной таблице смертности для всех причин.

При исключении двух причин необходимо воспользоваться формулой:

$$q_x^{(jh)} = \frac{(1-w_{jx} - w_{hx})q_x}{1-0,5q_x(w_{jx} + w_{hx})}. \text{ При этом нельзя ограничиться простым}$$

суммированием «выигрыша» от исключения двух причин, поскольку избежавший смерти от одной причины может умереть от другой.

**ЗАДАЧИ***Задача 1. Анализ первых браков с учетом смертности*<sup>84</sup>

В закрытом населении мы располагаем вероятностями вступления в первый брак  ${}_5p_x$  и вероятностями умереть для никогда не состоявших в браке  ${}_5q_x$ :

Точный возраст  x	Вероятность вступить в первый брак при отсутствии смертности (‰)  ${}_5p_x$	Вероятность умереть при отсутствии брачности (‰)  ${}_5q_x$
15	80	10
20	560	20
25	420	30
30	100	30
35	40	30
40	10	40
45	0	40

- 1) Постройте краткую таблицу вступления в первый брак с корнем таблицы, равным 100000 женщин, никогда не состоявших в браке в возрасте 15 лет
- 2) Постройте краткую таблицу смертности никогда не состоявших в браке, приняв во внимание, что вероятность дожить от рождения до возраста 15 лет равна 75%, и взяв за корень таблицы число родившихся, равное 100000.
- 3) Рассчитайте комбинированную таблицу брачности и смертности. Какое количество браков в разных возрастах было «предотвращено» из-за смертности?

*Задача 2. Анализ смертности в открытом населении*<sup>85</sup>

Для поколения мужчин, родившихся в 1935 году, мы располагаем данными о количестве смертей, эмигрантов и иммигрантов. Исходная численность поколения в 1935 году составила 125343 человека.

<sup>84</sup> Franck Cadier C. Démographie. Tome 1. – Paris: Economica, 1990. – pp. 96 – 99

<sup>85</sup> A. Nombissi Principes et méthodes d'analyse démographique. Travaux dirigés. – Université Catholique de Louvain ; année académique 1995 – 1996

Точный возраст	Смерти	Эмигранты	Иммигранты
0	20234	5643	1001
1	10484	3134	986
5	2670	732	212
10	2009	532	356
15	2603	788	617
20	3175	1413	740
25	3402	1572	856
30	3639	1419	1022
35	3805	1723	656

- 1) Нанесите эти данные на демографическую сетку
- 2) Сколько смертей в этом поколении наблюдалось в течение 1940 – 1945 гг.?
- 3) Рассчитайте возрастные коэффициенты смертности (в точных возрастах)
- 4) Преобразуйте эти коэффициенты в вероятности, используя гипотезы относительно эволюции функции дожития. Уточните, являются ли рассчитанные Вами вероятности «чистыми» вероятностями.

*Задача 3. Анализ смертности в открытом населении<sup>86</sup>*

В таблице приведены данные, относящиеся к поколению 1918 года рождения, о смертях и миграции в возрасте 15 – 50 лет. В возрасте 15 лет в этом поколении насчитывалось 13177 мужчин и 13082 женщины.

Возрастные группы	иммигранты		эмигранты		смерти	
	мужчины	женщины	мужчины	женщины	мужчины	женщины
15-19	518	511	498	545	114	90
20-24	1010	937	880	887	131	124
25-29	730	909	601	759	127	125
30-34	2393	2211	1665	1721	118	78
35-39	3029	2362	2498	1887	127	86
40-44	4577	3154	4295	2917	196	126
45-49	8653	6923	8474	6759	356	238

- 1) Используя гипотезу 1 равномерного распределения событий в возрастных интервалах, постройте таблицу смертности для данного поколения. Сравните смертность мужчин и женщин.

<sup>86</sup> Dittgen A., Lamy-Festy M., Travaux pratiques d'analyse démographique. – Masson, Paris, 1989. – p. 13 – 14.

2) Рассчитайте таблицу смертности при гипотезе 2, согласно которой внутри каждого интервала от  $x$  до  $x+5$  иммиграция имеет место сразу после  $x$ -го дня рождения, а эмиграция - накануне  $(x+5)$ -го дня рождения

3) Рассчитайте таблицу смертности при гипотезе 3, согласно которой на этот раз эмиграции имеют место сразу после  $x$ -го дня рождения, а иммиграции – накануне  $(x+5)$ -го.

4) Сравните для каждого пола все три полученные таблицы и прокомментируйте различия.

5) Уточните другие гипотезы (если таковые имелись), которыми Вы пользовались при расчете таблиц.

*Задача 4\*. Анализ смертности с учетом миграции<sup>87</sup>*

Вам предлагается изучить ошибки, которые возникают при анализе миграции в поколении с высокой иммиграцией/эмиграцией, если влияние миграции не учтено. Необходимо измерить ошибку при расчете ожидаемой продолжительности жизни при рождении ( $e_0$ ), при условии, что этот расчет осуществляется только на основе зарегистрированных смертей на исходной территории. Для этого необходимо построить следующую модель: у нас есть поколение из 100 000 мужчин, рожденных на территории А. Пусть это поколение одновременно вымирает в соответствии с таблицей 1 и эмигрирует в соответствии с таблицей 2. На основе данных этих таблиц можно рассчитать число смертей и миграций, которые могли бы произойти на территории А.

1) Запишите равенства, существующие между событиями в чистом виде и при наличии помех для смертей и для эмиграции.

Используйте следующие обозначения:

$S_x$  – дожившие до возраста  $x$  на территории А при отсутствии эмиграции;

$Z_x$  – реально дожившие до возраста  $x$  на территории А при отсутствии эмиграции;

${}_a p_x$  – вероятность дожития от  $x$  до  $x+a$  при отсутствии эмиграции;

---

<sup>87</sup> A. Nombissi Principes et méthodes d'analyse démographique. Travaux dirigés. – Université Catholique de Louvain ; année académique 1995 – 1996

${}_a q_x$  – вероятность умереть в интервале от  $x$  до  $x+a$  при отсутствии эмиграции;

$D_{(x, x+a)}$  – смерти при отсутствии эмиграции;

$D'_{(x, x+a)}$  – реально зарегистрированные смерти на территории А;

$R_x$  – неэмигранты, проживающие на территории А в возрасте  $x$  при отсутствии смертности;

${}_a r_x$  – вероятность неэмигрировать при отсутствии смертности;

$E_{(x, x+a)}$  – число эмигрантов при отсутствии смертности;

$E'_{(x, x+a)}$  – число реально зарегистрированных эмигрантов;

2) Рассчитайте численность доживающих  $S_x$  и ряд смертей  $D_{(x, x+a)}$  в поколении 100000 мужчин при отсутствии эмиграции в интервале точного возраста 0 – 50 лет.

3) Рассчитайте численность неэмигрирующих  $R_x$  и числа эмигрантов  $E_{(x, x+a)}$  в поколении при отсутствии миграции в интервале точного возраста 15 – 50 лет.

4) Рассчитайте число смертей и эмиграций, которые реально имели место на территории А в интервале точного возраста 0 – 50 лет. Каково число доживших до возраста 50 лет и неэмигрировавших  $Z_x$ ? Проверьте Ваши результаты, используя соотношение:  $Z_{50} = S_{50} * (R_{50}/R_{15})$ , которое можно проверить:  $Z_{50} = Z_0 * (S_{50}/S_0) * (R_{50}/R_0)$

5.1) Рассчитайте ожидаемую продолжительность жизни при рождении  $e_0$  в поколении, зная, что ожидаемая продолжительность жизни в возрасте 50 лет равна 23 годам.

5.2) Рассчитайте средний возраст смерти, используя реально наблюдавшиеся смерти на территории А. Сравните этот результат с  $e_0$  и прокомментируйте разницу.

Указание: ожидаемая продолжительность жизни в возрасте  $x$  является средним возрастом смерти между точным возрастом  $x$  и предельным возрастом  $w$ . Ожидаемую продолжительность жизни рассчитывают как сумму прожитых лет от возраста  $x$  до возраста  $w$ , отнесенную к дожившим до возраста  $x$  ( $l_x$ ).

В ходе решения заполняйте таблицы из задания.

Таблица 1 Таблица смертности при отсутствии эмиграции

Точный возраст	${}_a q_x$	$S_x$	$D_{(x, x+a)}$	${}_a p_x$	${}_a L_x$	$e_x$
0	25					
1	5,13					
5	2,06					
10	2,07					
15	6,21					
20	8,33					
25	8,4					
30	8,47					
35	11,75					
40	20,54					
45	34,22					
50	10000					
w						

Таблица 2 Таблица эмиграции при отсутствии смертности:

Точный возраст	коэффициент эмиграции ${}_a e m_x$	$R_x$	$E_{(x, x+a)}$
10			
15	41		
20	82		
25	73		
30	41		
35	22		
40			

Таблица 3. Таблица множественного выбытия (смертность и эмиграция)

Точный возраст	${}_a q_x$	коэффициент эмиграции ${}_a e m_x$	$Z_x$	$D'_{(x, x+a)}$	$E'_{(x, x+a)}$	средний возраст смерти	число прожитых лет
0							
1							
5							
10							
15							
20							
25							
30							
35							
40							
45							
50							
w							

*Задача 5. Анализ рождаемости с учетом смертности*<sup>88</sup>

В некоторой стране поколение женщин не затронуто миграцией до возраста 15 лет и после возраста 45 лет. Рождаемостью до возраста 15 лет можно пренебречь. В таблице приведены возрастные коэффициенты рождаемости и числа доживающих на 10000 женщин данного поколения из таблиц рождаемости и смертности:

Точный возраст, x	Возрастные коэффициенты рождаемости, f(x, x+1)	Число доживающих до точного возраста x, S <sub>x</sub>	Точный возраст, x	Возрастные коэффициенты рождаемости, f(x, x+1)	Число доживающих до точного возраста x, S <sub>x</sub>
15		9000	30	1420	8850
16	10	8990	31	1270	8840
17	40	8980	32	1200	8830
18	120	8970	33	1080	8820
19	330	8960	34	960	8810
20	670	8950	35	720	8800
21	1020	8940	36	610	8790
22	1420	8930	37	500	8780
23	1700	8920	38	390	8770
24	1820	8910	39	240	8760
25	1940	8900	40	190	8750
26	1900	8890	41	90	8740
27	1820	8880	42	60	8730
28	1740	8870	43	40	8720
29	1600	8860	44	20	8710
			45	10	8700

- коротко прокомментируйте эволюцию коэффициентов рождаемости с возрастом;
- рассчитайте коэффициент итоговой рождаемости одной женщины из этого поколения и средний возраст матери при рождении ребенка без учета миграции;
- постройте чистую таблицу рождаемости этого поколения;
- рассчитайте показатели итоговой рождаемости и среднего возраста матери при рождении ребенка с учетом смертности. Сравните результаты с теми, которые получены без учета смертности;

<sup>88</sup> Franck Cadier C. Démographie. Tome 1. – Paris: Economica, 1990. – pp. 101 – 107

- при условии, что на 100 девочек рождается 105 мальчиков, рассчитайте нетто-коэффициент воспроизводства для одной женщины этого поколения.

*Задача 6. Смертность в Москве по причинам смерти*

В таблице приведены возрастные коэффициенты смертности (на 100 тыс. человек данного пола и возраста) от некоторых причин и коэффициенты смертности от всех причин (не только включенных в таблицу) мужчин Москвы в 1996 г.

возраст	Инфекционные и паразитарные болезни	Новообразова-ния	Болезни системы кровообращения	Болезни Дыхательной системы	Болезни пищеварительной системы	Травмы, отравления, насильственные причины смерти	смертность от всех причин
0	26,2248	1,4569	0	13,1124	1,4570	27,6817	760,5180
1-4	7,8241	13,5143	0,7113	1,4226	0,7113	20,6271	76,8180
5-9	1,8389	6,2521	0,3678	0,3678	0,3678	23,9053	47,4428
10-14	0,6694	7,6980	1,0041	1,3388	0	28,1143	44,5143
15-19	3,8895	13,0830	10,6078	5,3039	1,7680	134,0124	181,3942
20-24	14,4596	13,0489	32,4458	10,5802	6,3481	279,3163	371,0111
25-29	19,5596	19,5596	66,6621	15,9670	12,3744	379,6150	539,2848
30-34	25,0557	26,3744	115,0585	21,4292	42,5288	389,3526	666,6139
35-39	39,3933	42,7699	178,6767	37,9864	59,0899	409,4088	822,1942
40-44	44,5498	91,5747	349,2831	57,8529	80,7466	484,1701	1218,3143
45-49	53,7033	198,9011	628,5274	80,8864	115,0311	511,5073	1722,8148
50-54	58,9084	304,5451	902,5206	115,5938	132,8217	524,0621	2210,7308
55-59	52,6870	584,7519	1291,2035	117,6182	145,8170	475,6675	2832,4849
60-64	44,1803	877,0385	1969,0081	127,1676	158,8102	407,7722	3766,0713
65-69	35,4138	1333,7294	2959,9082	181,0673	170,2147	333,0039	5204,1149
70-74	32,0368	1575,8122	3971,5673	188,2164	183,2107	252,2901	6436,4019
75-79	39,5990	1788,2078	5687,668	216,7525	229,2574	208,4158	8490,8610
80-84	26,7133	1990,1428	9232,1254	312,5459	288,5039	387,3432	12747,599
85 +	61,8326	1835,9533	14654,332	418,5593	304,4068	499,4173	18459,416

Источник: данные Мосгорстата

Постройте общую таблицу смертности от всех причин (используя демографический метод), таблицы смертности от каждой из причин в отдельности, а также таблицы смертности при отсутствии одной из причин. Сравните и прокомментируйте полученные результаты.

*Задача 7. Влияние землетрясения на уровень смертности*

В 1988 году произошло сильное землетрясение в Армении, унесшее жизни почти 40 тысяч человек. На основании возрастных коэффициентов смертности за 1987 и 1988 гг. оцените:

- на сколько лет сократилась продолжительность предстоящей жизни при рождении у мужчин;
- на сколько лет сократилась продолжительность предстоящей жизни при рождении у женщин;
- насколько вырос уровень смертности от несчастных случаев, отравлений и травм у мужчин и женщин по отдельным возрастным группам, в каких возрастах прирост смертности был наибольшим.

Постройте таблицу смертности по причинам смерти (две причины) и таблицу смертности для одной причины (несчастные случаи, отравления и травмы).

Каким был бы уровень смертности в 1987 и в 1988 гг., если бы смертность от несчастных случаев, отравлений и травм была бы устранена полностью?

возраст	Возрастные коэффициенты смертности от всех причин (на 100000 человек)				Возрастные коэффициенты смертности от несчастных случаев, отравлений и травм (на 100000 человек)			
	мужчин	мужчин	женщин	женщин	мужчин	мужчин	женщин	женщин
	ы	ы	ы	ы	ы	ы	ы	ы
	1987	1988	1987	1988	1987	1988	1987	1988
до 1 года	2413,1	2719,8	2138,1	2399,5	82,3	519,4	72,7	52,4
1-4	237,6	824,3	236	853,2	57,1	654,4	75,5	679,7
5-9	52,4	442,8	38,2	482,5	22,7	418,1	11,7	460,5
10-14	44	435,4	23,4	518,6	17,6	421,1	6,5	495,4
15-19	71,5	357,4	43	594,7	30,5	320,1	17	57,6
20-24	78,1	340,9	54,6	614,4	46,2	308,7	14	586,3
25-29	108	357,5	63,5	595,5	61,7	311,3	15,5	556,7
30-34	115,1	421,4	65,2	611,9	52,2	350	15,7	554,9
35-39	222	501,7	89,8	680	70,5	374,7	14,5	595,2
40-44	275,5	701,9	152,5	757,7	63,6	446,2	18,2	623,4
45-49	487,7	926,5	246,1	765,9	70,8	417,1	18,5	511
50-54	774,3	1202,7	430,9	937	64,4	415,1	23,7	549,1
55-59	1204,8	1643,8	758,8	1204,1	89,6	390,2	36,4	566,6
60-64	2001,2	2510,1	1145,8	1545,2	81,5	476,9	32,8	573
65-69	3170,9	3714,6	1725,4	2188,3	145,3	469,5	46,5	583

70-74	4342,7	5254,8	2730,8	3689,9	63,6	549,8	72,9	754,1
75-79	6844	7761,9	5006,4	5306,6	161,2	809,3	106,3	672,2
80-84	10075,2	11007,5	7136,8	7767,3	205,6	1041,1	135,7	846,9
85 лет и старше	17995	17218,2	13334,8	13110,1	307,5	1376,1	140,7	1008,5

*Задача 8. Анализ смертности по причинам смерти*

На основе данных таблицы определите следующие величины:

- В каком возрастном интервале наблюдаются максимальные числа умерших от всех причин, от болезней системы кровообращения, от несчастных случаев отравлений и травм.
- Вероятность того, что мужчина, которому исполнилось ровно 30 лет, умрет от болезней сердечно-сосудистой системы в возрасте старше 60 лет?
- Какова вероятность для мужчин в точном возрасте 20 лет умереть от несчастного случая, отравления или травмы в возрастном интервале от 20 до 30 лет?
- Какая часть всех смертей от болезней системы кровообращения, отравлений и травм происходит в возрасте до 50 лет?
- Какая часть всех смертей от несчастных случаев, отравлений и травм происходит в возрасте до 50 лет?

Показатели таблицы смертности по причинам смерти мужского населения России, 1988 г.

Возраст	Число лиц, умерших после возраста x лет			Числа доживающих после устранения следующих причин смерти	
	От всех причин	От болезней системы кровообращения	От несчастных случаев, отравлений и травм	Болезни системы кровообращения	Несчастные случаи, отравления и травмы
0	100000	52200	11981	100000	100000
1	97864	52191	11901	97874	97944
5	97343	52183	11718	97360	97604
10	96995	52177	11505	97018	97469
15	96694	52171	11309	96723	97363
20	96004	52145	10800	96058	97181
25	94862	52097	9887	94964	96948
30	93545	52005	8870	93736	96639

35	91897	51800	7761	92290	96079
40	89793	51354	6650	90620	95035
45	87069	50548	5586	88676	93268
50	82675	49055	4381	85695	89827
55	77077	46938	3340	82039	84845
60	69007	43637	2417	76849	76928
65	58859	38889	1770	70611	66283
70	46833	32503	1290	63435	53224
75	33253	24381	891	55279	38174
80	20365	15741	574	47028	23662
85 и старше	9939	7936	368	39269	11713

*Задача 9*

На основе данных *Задачи 8* определите:

А. Вероятность того, что мужчина, которому исполнилось ровно 30 лет, умрет в возрасте старше 60 лет при условии:

- (1) устранения смертности от болезней системы кровообращения,
- (2) устранения смертности от несчастных случаев, отравлений и травм,
- (3) действия всех причин смерти?

Сравните полученные результаты.

Б. Какая часть всех смертей происходит в возрасте до 50 лет при условии:

- (1) устранения смертности от болезней системы кровообращения,
- (2) устранения смертности от несчастных случаев, отравлений и травм,
- (3) действия всех причин смерти?

Сравните полученные результаты.

В. Какой выигрыш в увеличении продолжительности предстоящей жизни с рождения получило бы мужское население России в 1988 году, если бы были устранены:

- (1) смертность от болезней системы кровообращения,
- (2) смертность от несчастных случаев, отравлений и травм?

*Задача 10\**

Пусть нам известны параметры таблиц смертности по причинам смерти за два года:  $t$  и  $t+1$ . Оцените вклад от снижения смертности от  $K$ -ой причины смерти в увеличение продолжительности предстоящей жизни.

*Задача 11<sup>\*89</sup>. Построение таблицы смертности при отсутствии одной причины смерти*

Приведенная ниже таблица содержит статистические данные, касающиеся французских депутатов, выбранных между 1789 и 1794 гг.

- К каким поколениям принадлежат эти депутаты? Каковы пограничные даты, между которыми наступили их смерти? Впоследствии будем считать, что в среднем смерти наступили 1 января 1810 г.
- Рассчитайте серию коэффициентов смертности (от всех причин) этой группы и соответствующую таблицу смертности, приняв в качестве корня таблицы 10000 человек в возрасте 25 лет.
- Сделайте то же самое только для «нормальной» смертности (другие смерти).
- Рассчитайте продолжительность предстоящей жизни в возрасте 25 лет по каждой из этих таблиц.
- Ожидаемая продолжительность жизни в том же возрасте всего мужского населения Франции составляла от 33,7 лет в 1780 – 1789 гг. до 37,5 лет в 1820 – 1829 гг. Сравните эти значения с полученными Вами для депутатов.

возраст	число депутатов	вышли из-под наблюдения	насильственные смерти*	другие смерти	общее число смертей
20-24	5	0	0	0	0
25-29	124	1	6	2	8
30-34	308	6	23	6	29
35-39	449	19	29	18	47
40-44	400	40	34	32	66

<sup>89</sup> Источник: Dittgen A., Lamy-Festy M., Travaux pratiques d'analyse démographique. – Masson, Paris, 1989

45-49	338	57	21	64	85
50-54	253	48	20	87	107
55-59	152	43	15	141	156
60-64	93	45	6	183	189
65-69	44	21	13	217	230
70-74	12	15	2	247	249
75-79	4	5	2	299	301
80-84	1	2	0	207	207
85-89	0	1	0	135	135
90-94	0	0	0	51	51
95-99	0	0	0	17	17
100 и старше	0	0	0	3	3

\* насильственные смерти – казни, убийства, самоубийства

Источник: I. Houdaille *Mortalite des deputes elus de 1789 a 1794, Population, 1979, 3.*

### Задача 12<sup>90</sup> Анализ брачности с учетом смертности

Мы располагаем таблицей первых браков (при отсутствии смертности) и таблицей смертности (при отсутствии брачности) Рассчитайте число реально наступивших браков с учетом смертности никогда не состоявших в браке. Уточните условия, при которых реально наблюдаемую интенсивность брачности можно считать характеристикой брачности в «чистом» состоянии.

возраст	Таблица смертности			Таблица брачности		
	числа доживающих до точного возраста	числа умирающих	чистая вероятность умереть	числа не состоящих в браке в точных возрастах	числа вступающих в брак	чистая вероятность вступления в брак
	$l(x)$	$d(x, x+1)$	$q(x)$	$C(x)$	$m(x, x+1)$	$n(x)$
15	66834	479	0,007167	10000	57	0,0057
16	66355	504	0,0075955	9943	176	0,0177009
17	65851	524	0,0079574	9767	396	0,0405447
18	65327	542	0,0082967	9371	722	0,0770462
19	64785	555	0,0085668	8649	928	0,1072956
20	64230	564	0,0087809	7721	1061	0,1374174
21	63666	572	0,0089844	6660	1062	0,1594595
22	63094	571	0,00905	5598	937	0,1673812
23	62523	571	0,0091326	4661	753	0,1615533
24	61952	570	0,0092007	3908	594	0,1519959
25	61382	568	0,0092535	3314	462	0,1394086
26	60814	567	0,0093235	2852	355	0,1244741
27	60247	566	0,0093947	2497	275	0,1101322
28	59681	565	0,009467	2222	214	0,0963096

<sup>90</sup> По материалам: R.Pressat *L'analyse démographique, PUF, 1973*

29	59116	564	0,0095406	2008	169	0,0841633
30	58552	565	0,0096495	1839	134	0,0728657
31	57987	563	0,0097091	1705	107	0,0627566
32	57424	563	0,0098043	1598	87	0,0544431
33	56861	563	0,0099013	1511	74	0,0489742
34	56298	560	0,0099471	1437	63	0,0438413
35	55738	560	0,010047	1374	54	0,0393013
36	55178	562	0,0101852	1320	47	0,0356061
37	54616	562	0,01029	1273	40	0,0314218
38	54054	563	0,0104155	1233	35	0,0283861
39	53491	565	0,0105625	1198	29	0,024207
40	52926	565	0,0106753	1169	25	0,0213858
41	52361	566	0,0108096	1144	22	0,0192308
42	51795	567	0,010947	1122	20	0,0178253
43	51228	572	0,0111658	1102	18	0,0163339
44	50656	582	0,0114893	1084	16	0,0147601
45	50074	589	0,0117626	1068	14	0,0131086
46	49485	599	0,0121047	1054	12	0,0113852
47	48886	611	0,0124985	1042	11	0,0105566
48	48275	623	0,0129052	1031	10	0,0096993
49	47652	636	0,0133468	1021	9	0,0088149
50	47016	649	0,0138038	1012		

**РЕШЕНИЯ**

Решение Задачи 4

1) соотношения между числами умерших и мигрировавших:

$$\text{для смертей: } {}_a q_x = \frac{D'_{x,x+a}}{E'_{x,x+a}} \text{ и } D'_{x,x+a} = Z_x * {}_a q_x * \left(1 - \frac{{}_a em_x}{2}\right) \quad (1)$$

$$\left(Z_x - \frac{D'_{x,x+a}}{2}\right)$$

$$\text{для эмиграций: } {}_a em_x = \frac{E'_{x,x+a}}{D'_{x,x+a}} \text{ и } E'_{x,x+a} = Z_x * {}_a em_x * \left(1 - \frac{{}_a q_x}{2}\right) \quad (2)$$

$$\left(Z_x - \frac{D'_{x,x+a}}{2}\right)$$

для одновременно оставшихся в живых и неэмигрировавших:

$$Z_{x+a} = Z_x * (1 - {}_a q_x)(1 - {}_a em_x) \quad (3)$$

Напомним, что при наличии помех:

$$D_{x,x+a} = Z_x * {}_a q_x \text{ и } E_{x,x+a} = Z_x * {}_a em_x$$

Представленные здесь формулы (1) и (2) с учетом формулы (3) позволяют рассчитать реально наступившее число событий, иными словами, смерти с учетом миграции и число эмигрировавших с учетом смертности.

2) Таблицу дожития можно дополнить, используя следующие формулы:

$$D_{(x,x+a)} = S_x - S_{x+a}$$

$$q_x = D_{(x,x+a)} / S_x$$

Поскольку ожидаемая продолжительность жизни в возрасте 50 лет равна 23 годам, последний возраст смерти равен  $w-1$ . Соответствующая вероятность умереть и число смертей не рассчитываются, а получаются логически.  ${}_nL_{50} = T_{50} = l_{50} * e_{50}$ . Таким образом, числа умерших и  $e_x$  в Таблице 1 получены при отсутствии эмиграции, т.е. в чистом виде.

3) Расчет численности неэмигрирующих  $R_x$  и числа эмигрантов  $E_{(x, x+a)}$  в поколении при отсутствии миграции в интервале точного возраста 15 – 50 лет

$$E_{x,x+a} = R_x * {}_a e_{m_x} \text{ и } R_{x,x+a} = R_x - E_{x,x+a} = R_x * (1 - {}_a e_{m_x})$$

До возраста 15 лет и после возраста 40 лет эмигрантов нет. Поскольку речь идет о расчете числа эмигрировавших в отсутствие смертности, число неэмигрантов в возрасте 15 лет равно корню таблицы, т.е. 100000.

4) Таблица 3, которую необходимо построить, учитывает одновременно 2 риска: умереть и эмигрировать. Вероятности смерти и эмиграции даны в задании, будем одновременно использовать их по отношению к условному поколению, используя формулы (1), (2) и (3).

Выжившие неэмигранты в возрасте 50 лет насчитывали 66974 человек. Поскольку оба риска независимы по исходной гипотезе, можно написать:  $Z_{50} = Z_0 * (S_{50}/S_0) * (R_{50}/R_0)$

Поскольку  $Z_0 = S_0 = 100000$ , имеем:

$$Z_{50} = S_{50} * (R_{50}/R_{15}) = 87500 * (76542/100000) = 66974,25$$

5.1) Средняя продолжительность жизни в поколении задана формулой:

$$e_0 = T_0 / l_0$$

$$\text{при } T_0 = \sum_{x=0}^{50} {}_a L_x + T_{50} \text{ и } {}_1 L_0 = 0.15S_0 + 0.85S_1$$

$${}_a L_x = \frac{a}{2} (S_x + S_{x+a}) \text{ для } x > 0$$

$$T_{50} = e_{50} * l_{50}$$

Результаты внесены в таблицу 1.  $E_0$  равно 67,4 (при отсутствии миграции).

5.2) Средний возраст смерти на основе реальных смертей рассчитывается как средняя из возрастов смерти, взвешенная по числу умерших.

$$\bar{X} = \frac{1}{\sum_0^w D'_{x,x+a}} \sum_0^w (x + \tau) D'_{x,x+a}$$

при  $\tau=0,15$  если  $x=0$

$\tau=2$  если  $x=1$

$\tau=2,5$  если  $1 < x < 50$

$\tau=23$  если  $x=50$ .

Результаты представлены в двух последних колонках таблицы 3.

Для смертей на протяжении первого года жизни мы отказались от гипотезы равномерного распределения событий и воспользовались коэффициентом, приведенным в задании. Для смертей после возраста 50 лет коэффициент равен 23, поскольку ожидаемая продолжительность жизни в возрасте 50 лет равна 23 годам в чистом состоянии и эмиграция равна нулю после 40 лет.

На базе этих данных средний возраст смерти составляет 66,5 лет, то есть ниже, чем ожидаемая продолжительность жизни в чистом виде. Если использовать только наблюдаемые смерти, мы получаем недооценку, вызванную тем, что в расчет не принимаются эмигранты и их возраст смерти. На самом деле как правило это молодые люди, вероятность дожития которых значительно выше.

Таблица 1 Таблица смертности при отсутствии эмиграции

Точный возраст	${}_a q_x$	$S_x$	$D_{(x, x+a)}$	${}_a p_x$	${}_a L_x$	$e_x$
0	25	100000	2500	975,0	97875	67,4
1	5,13	97500	500	994,87	389000	68,1
5	2,06	97000	200	997,94	484500	64,5
10	2,07	96800	200	997,93	483500	59,6
15	6,21	96600	600	993,79	481500	54,7
20	8,33	96000	800	991,67	478000	50,0
25	8,4	95200	800	991,6	474000	45,4
30	8,47	94400	800	991,53	470000	40,8
35	11,75	93600	1100	988,25	465250	36,1
40	20,54	92500	1900	979,46	457750	31,5
45	34,22	90600	3100	965,78	445250	27,1
50	(1000,00)	87500	(87500)	(0)	(2012500)	(23,0)

w		0				
---	--	---	--	--	--	--

Таблица 2 Таблица эмиграции при отсутствии смертности

Точный возраст	коэффициент эмиграции ${}_a e m_x$	$R_x$	$E_{(x, x+a)}$
10		(100000)	0
15	41	100000	4100
20	82	95900	7864
25	73	88036	6427
30	41	81610	3346
35	22	78264	1722
40		76542	0

Таблица 3 Таблица множественного выбытия (смертность и эмиграция)

Точный возраст	${}_a q_x$	коэфф. эмиграции ${}_a e m_x$	$Z_x$	$D'_{(x, x+a)}$	$E'_{(x, x+a)}$	средний возраст смерти	число прожитых лет
0	25	-	100000	2500	0	0,15	375
1	5,13	-	97500	500	0	3	1500
5	2,06	-	97000	200	0	7,5	1500
10	2,07	-	96800	200	0	12,5	2500
15	6,21	41	96600	588	3948	17,5	10230
20	8,33	82	92064	736	7518	22,5	16560
25	8,4	73	83810	679	6092	27,5	18672,5
30	8,47	41	77039	639	3145	32,5	20767,5
35	11,75	22	73255	851	1602	37,5	31912,5
40	20,54	-	70801	1454	0	42,5	61795
45	34,22	-	69347	2373	0	47,5	112717,5
50	(1000,00)	-	66974	(66974)	-	73	4889102
w		-	(0)	77694	22306	66,51	5167622

*Решение Задачи 10*

Продолжительность предстоящей жизни, согласно определению, равна  $E_0 = \sum L_i / l_0$ , где  $l_0$  – корень таблицы,  $L_i$  – число человеко-лет жизни, прожитых в интервале  $(i, i+1)$ .

Величина  $L_i$  может быть представлена как сумма лет  ${}^k L_i$ , прожитых теми, кто умрет от  $K$ -ой причины:  $L_i = \sum {}^k L_i$ .

Тогда вклад снижения смертности от К-ой причины  $\Delta_k$  в увеличение продолжительности предстоящей жизни можно представить как следующее отношение:

$$\Delta_k = \frac{\sum ({}^k L_i^{t+1} - {}^k L_i^t)}{E_0^{t+1} - E_0^t} \cdot 100$$

#### Решение Задачи 11

Депутаты принадлежат к группе поколений 1704 – 1774 гг. рождения. Их смерти, при предположении, что никто из депутатов не достиг бы возраста 105 лет, вписываются в период между 1.01.1789 и 31.12.1879.

Для наблюдаемого населения депутатов, подвергающегося, помимо смертности, влиянию «входа» (назначение) и «выхода» (из под наблюдения), коэффициент смертности получается из формулы:

$${}_5q_x = \frac{D'(x, x+5)}{S'_x + \frac{N'(x, x+5)}{2} + \frac{E'(x, x+5)}{2}}, \text{ где } D'(x, x+5), N', E' - \text{соответственно}$$

смерти, назначения и выход из-под наблюдения между возрастом  $x$  и  $x+5$ , и  $S'_x$  – наблюдаемую численность в возрасте  $x$ .

Коэффициент «нормальной» смертности получается на основе следующей формулы:

$${}_5q_x = \frac{D'^*(x, x+5)}{S'_x + \frac{N'(x, x+5)}{2} + \frac{E'(x, x+5)}{2} + \frac{D'^{**}(x, x+5)}{2}}, \text{ где } D'^* - \text{смерти}$$

«нормальной» смертности и  $D'^{**}$  – смерти, вызванные насилием.

Для удобства расчетов необходимо построить сначала серию  $T'$ , затем две серии делителей или численностей населения, подвергающегося риску ( $R_x^*$  и  $R_x^{**}$ ).

x	S'_x	Смертность от всех причин			«Нормальная» смертность		
		R*_x	таблица		R**_x	таблица	
			{}_5q_x, ‰	S_x		{}_5q_x, ‰	S_x
25	5	66.5	120	10000	65.3	31	10000
30	120	271	107	8800	259.5	23	9690
35	393	608	77	7858	593.5	30	9467

40	776	956	69	7253	939	34	9183
45	1070	1210.5	70	6753	1200	53	8871
50	1266	1368.5	78	6280	1358.5	64	8401
55	1364	1418.5	110	5790	1411	100	7863
60	1317	1341	141	5153	1338	137	7077
65	1176	1187.5	194	4427	1181	184	6107
70	969	967.5	257	3568	966.5	256	4984
75	717	716.5	420	2651	715.5	418	3708
80	415	414.5	499	1538	414.5	499	2158
85	207	206.5	654	770	206.5	654	1081
90	71	71	718	267	71	718	374
95	20	20	850	75	20	850	105
100	3	3		11	3		16

Продолжительность предстоящей жизни в возрасте 25 лет рассчитывается по формуле:

$$e_{25} = 2,5 + \frac{5}{S_{25}} (S_{30} + S_{35} + \dots + S_{100})$$

Ожидаемая продолжительность жизни в случае смертности от всех причин равна 33,1 года, в случае «нормальной смертности» – 42 года.

Разница в смертности всего населения и депутатов обусловлена лучшими условиями жизни и гигиены у депутатов.

Реальная смертность в обеих группах, тем не менее, была более высокой по причине войны – для всех мужчин, и из-за политических репрессий – только для депутатов. Сверхсмертность депутатов наиболее высокая в возрастах 25-45 лет, что приводит к существенным различиям в смертности.

## РАЗДЕЛ 9. ДЕМОГРАФИЧЕСКИЙ РОСТ

### 9.1. УРАВНЕНИЕ ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО БАЛАНСА

Если известны числа рождений и смертей, а также иммигрантов и эмигрантов, то изменение численности населения страны за определенный период времени  $(0, t)$  количественно выражается **уравнением демографического баланса или основным демографическим уравнением**:

$$P(t) = P(0) + \{B(0, t) - D(0, t)\} + \{I(0, t) - E(0, t)\}, \quad (1)$$

где  $P(0)$  и  $P(t)$  – численности населения в начале и конце исследуемого периода  $(0, t)$ ;

$B(0, t)$  – число родившихся за период  $(0, t)$ ;

$D(0, t)$  – число умерших за период  $(0, t)$ ;

$I(0, t)$  – число иммигрантов за период  $(0, t)$ ;

$E(0, t)$  – число эмигрантов за период  $(0, t)$ .

Уравнение демографического баланса также можно записать в виде соотношения между общим, естественным и миграционным приростами населения:

$$\Delta P = \Delta R + \Delta M,$$

где  $\Delta P = P(t) - P(0)$  – общий прирост населения;

$\Delta R = \{B(0, t) - D(0, t)\}$  – естественный прирост населения;

$\Delta M = \{I(0, t) - E(0, t)\}$  – миграционный прирост населения.

Демографический баланс можно составить для отдельных поколений. Так, для поколений, родившихся до момента 0, уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$P^c(t) = P^c(0) - D^c(0, t) + I^c(0, t) - E^c(0, t),$$

где индекс  $c$  указывает год рождения поколения. Численность же тех поколений, которые родились в период  $(0, t)$ , в конечный момент будет равняться  $P^c(t) = B^c(c) - D^c(c, t) + I^c(c, t) - E^c(c, t)$ , где  $c$  – год рождения поколений и  $0 < c < t$ .

Демографический баланс лежит в основе методологии оценок численности и возрастного состава населения в межпереписные годы и годы, следующие за последней переписью населения. Однако демографические данные не идеальны даже в развитых странах с налаженным статистическим учетом. Поэтому балансовое уравнение используется для определения величины и источника ошибок в учете населения. Разность между общим приростом, вычисленным, как правило, по данным переписей населения, и общим приростом, вычисленным по данным текущего учета демографических событий и миграции, называется «*ошибкой закрытия баланса*». Как правило, эта ошибка связана с недостатками текущего учета, в первую очередь – учета миграции. При отсутствии или плохом качестве данных о миграции уравнение демографического баланса можно использовать для оценки и коррекции величины миграционного прироста за межпереписной период.

*Пример 1.* В таблице приведен демографический баланс России за 1980 – 1989 гг., построенный по данным Госкомстата России. Ошибка закрытия баланса, равняется 383 тыс. человек. С учетом этой поправки миграционный прирост за указанный период составил не 1354, а 1737 тыс. человек.

Демографический баланс населения России за 1980 – 1989 гг. (тыс. человек)

	Численность населения на 1 января			Количество событий за 1980-1989 гг.	
I	1980	138291	1	Родившихся	21365
II	1989	147400	2	Умерших	13993
III	Общий прирост населения за 1980-1989 = II-I	9109	3	Естественный прирост = (1)-(2)	7372
			4	Прибывших	8034
			5	Выбывших	6680
			6	Миграционный прирост = (4)-(5)	1354
			7	Общий прирост населения = (3)+(7)	8726
				Ошибка закрытия баланса = (III)-(7)	383

Рассчитано по: Госкомстат России «Демографический ежегодник Российской Федерации. 1997». М., 1998.

Уравнение демографического баланса может быть выражено через общие коэффициенты рождаемости, смертности, естественного и миграционного приростов, коэффициенты прибытий (иммиграции) и выбытий (эмиграции):

$$K_{\Delta P} = K_{\Delta R} + K_{\Delta M}$$

где  $K_{\Delta P}$  – коэффициент общего прироста населения;  $K_{\Delta R}$  – коэффициент естественного прироста;  $K_{\Delta M}$  – коэффициент миграционного прироста.

Иначе коэффициент общего прироста населения записывается в виде

$$K_{\Delta P} = b - m + i - e,$$

где  $b$ ,  $m$ ,  $i$  и  $e$  – соответственно общие коэффициенты рождаемости, смертности, иммиграции и эмиграции.

Население, у которого отсутствует миграционный обмен с внешним миром, т.е. количество эмигрантов и иммигрантов равно 0, называется *закрытым*. Соответственно мы говорим об *открытом* населении в том случае, когда границы территории его проживания оказываются прозрачными для мигрантов.

*Пример 2. Составим демографический баланс населения Земного шара в 1995 – 2000 гг. если:*

	Численность населения			Количество событий 1995-2000 гг.	
I	1995	5662	1	Родившихся	660
II	2000	6057	2	Умерших	265
III	Общий прирост населения за 1980-1989 = II-I	395	3	Естественный прирост = (1)-(2)	395
			4	Прибывших	0
			5	Выбывших	0
			6	Миграционный прирост = (4)-(5)	0
			7	Общий прирост населения = (3)+(7)	395
				Ошибка закрытия баланса = (III)-(7)	0

Источник: World Population Prospects. The 2000 Revision. Volume 1: Comprehensive Tables. United Nations, New York, 2000.

С помощью имеющихся данных легко оценить общие коэффициенты рождаемости, смертности и общего прироста населения:  $b=22,5\%$ ,  $d =9,0\%$ ;  $r=13,5\%$

## 9.2 СКОРОСТЬ ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО РОСТА

Для характеристики изменения демографического роста во времени используются коэффициент общего прироста населения  $K_{\Delta P}$ , а также традиционные статистические характеристики рядов динамики – **темп роста** и **темп прироста**. **Темп роста населения** представляет собой отношение численности населения страны (региона, города и др.) в момент времени  $t$  к численности ее населения в некоторый начальный момент, принятый за базу сравнения:

$$T_p = \frac{P(t)}{P(0)},$$

где  $T_p$  – темп роста населения за период  $(0,t)$ ,

$P(t)$  – численность населения в момент времени  $t$ ,

$P(0)$  – численность населения в начальный момент времени  $0$ .

Среднегодовой за  $t$  лет темп прироста рассчитывается по формуле:

$$\bar{T}_p = \sqrt[t]{\frac{P(t)}{P(0)}}$$

**Темп прироста населения** рассчитывается как отношение величины общего прироста населения к численности населения на начало исследуемого периода или как разность между темпом роста и единицей:

$$T_{np} = \frac{P(t) - P(0)}{P(0)} = \frac{P(t)}{P(0)} - 1 = T_p - 1$$

**Среднегодовой темп прироста** рассчитывается по формуле

$$\bar{T}_{np} = \sqrt[t]{\frac{P(t)}{P(0)}} - 1$$

Темп роста и темп прироста могут также выражаться в процентах. Для этого левые части уравнений данного раздела надо умножить на 100.

### 9.3. ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ РОСТА НАСЕЛЕНИЯ

Простыми<sup>91</sup> называют демографические модели, в которых с помощью известных аналитических функций (линейных, экспоненциальных, гиперболических и др.) описывается динамика численности населения без учета изменения его возрастно-половой структуры. В настоящее время простые модели роста населения применяются для решения самых разнообразных демографических и экономических задач, в частности:

- для выполнения интерполяционных, ретроспективных и прогнозных оценок численности всего населения и его отдельных групп;
- для оценки демографической ситуации (на них основаны некоторые демографические показатели);
- в качестве экзогенных предпосылок они входят в различные экономические модели.

**Демографический рост по закону геометрической прогрессии.** Если предположить, что численность населения  $P(t)$  изменяется через равные промежутки времени, например, год, с постоянной скоростью, т.е.  $T_p=g$  для непрерывного случая или  $T_{пр}=x$  для дискретного случая, тогда через  $t$  лет мы получим

$$P(t)=P(0)*g^t \text{ или } P(t) = P(0) \cdot (1 + x)^t.$$

**Экспоненциальный демографический рост.** Если предположить, что численность населения  $P(t)$  меняется в каждый момент «непрерывного времени» с одинаковым темпом прироста  $r$ , то через  $t$  лет мы получим

$$P(t) = P(0) * e^{rt},$$

где  $e$  – основание натурального логарифма, равное 2.718281828...

Среднегодовой темп прироста для экспоненциального населения за  $t$  лет равен:

$$r = \frac{\ln(P(t)/P(0))}{t}.$$

Период удвоения численности населения для дискретного случая (геометрическая прогрессия) равен

---

<sup>91</sup> В зарубежной научной литературе такие модели иногда называют примитивными демографическими моделями.

$$T = \frac{\ln 2}{\ln(1+x)}.$$

Период удвоения для непрерывного случая (экспоненциальный рост) равен

$$T = \frac{\ln 2}{r}.$$

**Меняющаяся скорость демографического роста.** Пусть коэффициенты прироста населения меняются на протяжении периода  $(0, T)$  таким образом, что на каждом временном интервале  $\Delta t$  ( $\sum \Delta t = T$ ) наблюдаются различные, но постоянные на этих интервалах темпы прироста населения  $r_0, r_1, r_2, \dots$ . Тогда численность населения в конце периода может быть представлена следующим экспоненциальным выражением:

$$P(T) = P(0) * e^{r_0 * \Delta t} * e^{r_1 * \Delta t} * e^{r_2 * \Delta t} \dots = P(0) * e^{r_0 * \Delta t + r_1 * \Delta t + r_2 * \Delta t + \dots}.$$

Если  $\Delta t$  – бесконечно малая величина, то сумма показателей степени является интегралом функции  $r(t)$ , и численность населения в момент  $T$  равна

$$P(T) = P(0) * e^{\int_0^T r(t) dt}.$$

**Логистическая модель демографического роста** была впервые сформулирована Адольфом Кетле: «сопротивление росту населения должно возрастать пропорционально квадрату скорости этого роста».

Математически логистическая функция выражается формулой

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{\alpha - rt}},$$

где  $P(t)$  – численность населения в момент  $t$ ;  $e$  – основание натуральных логарифмов;  $K, \alpha, r$  – параметры уравнения логистической кривой.

**Гиперболическая модель роста населения.** Попытки найти модель, описывающую динамику численности мирового населения за длительный период времени, привели некоторых ученых, среди которых можно назвать известного физика академика С. Капицу, к заключению, что данные о населении Земного шара  $P(t)$  за многие столетия хорошо укладываются только на гиперболическую кривую:

$$P(t) = \frac{186 \cdot 10^9}{2025 - T}$$

Более того, он предлагает рассматривать это выражение не как эмпирическую формулу, «а как выражение математически и физически корректно описывающее процесс самоподобного развития, следующий гиперболическому закону эволюции»<sup>92</sup>. Однако, несмотря на то, что гиперболическая модель хорошо согласуется с данными демографии, она принципиально ограничена областью, где она применима. Во-первых, численность населения по мере приближения к критической дате (2025 год) обращается в бесконечность. Получается, что 2025 год является подобием конца света. Во-вторых, согласно этой модели можно прийти к другому абсурдному результату, что в далеком прошлом, например, 10 или 20 млрд. лет тому назад, жили люди.

## **ЗАДАЧИ**

### *Задача 1*

Численность постоянного населения России по данным всеобщих переписей населения составила: на 17 января 1989 года – 147022 тыс. человек, на 9 октября 2002 года – 145 164 тыс. человек. Известны также годовые оценки чисел родившихся, умерших, прибывших и выбывших за 1989-2002 гг. (см. Приложение 1). Оцените ошибку закрытия демографического баланса за межпереписной период, а также дайте скорректированную оценку величины миграционного прироста.

Указание: предположите, что числа родившихся, умерших и мигрантов в течение года распределяются равномерно.

### *Задача 2*

Запишите систему уравнений демографического баланса для городского и сельского населения страны.

Указание: разделите миграционные потоки на внутренние (между городом и селом) и международные.

---

<sup>92</sup> Капица С.П., Теория роста населения Земли. Москва, 1997.С. 21.

**Задача 3**

Используя балансовый метод и данные таблицы, оцените:

- естественный и миграционный приросты для городского и сельского населения России в 1990-х гг.;
- темпы роста городского и сельского населения.

Сравните полученные результаты для городского и сельского населения. Какие, на Ваш взгляд, факторы обусловили наблюдавшиеся в те годы тенденции?

Годы	Численность населения на начало года (тыс. человек)	Число родившихся (человек)	Число умерших (человек)	Изменение численности населения из-за перемены статуса населенного пункта (тыс. человек)
<b>Городское население</b>				
1989	108425,6	1520741	1088471	78,2
1990	109238,4	1386247	1140613	73,9
1991	109798,4	1230516	1168887	-183,4
1992	109672,4	1068304	1254841	-460,6
1993	108920,3	930530	1488362	-70,4
1994	108461,8	960413	1614983	-20,2
1995	108337,2	933460	1554182	-1,7
1996	108121,2	897898	1445982	-57,5
1997	107793,7	870213	1387771	-43,7
1998	107528,3	887669	1379804	32,4
1999	107311,4	842640	1499466	-199,6
2000	107419,5	886908	1564034	-38,1
2001	107071,7	928642	1592254	-15,7
2002	106725,4	998056	1638822	-27,0
2003	106321,3	1050565	1657569	-23,7
2004	105818,4	1074247	1606894	-693,9
2005	104719,3	1520741	1088471	
<b>Сельское население</b>				
1989	38974,9	639818	495272	-78,2
1990	38802,3	602611	515380	-73,9
1991	38744,3	564110	521770	183,4
1992	39031,9	519340	552600	460,6
1993	39753,1	448453	640977	70,4
1994	39904,0	447746	686383	20,2
1995	39968,9	430346	649629	1,7

1996	39855,2	406740	636267	57,5
1997	39708,7	389730	628008	43,7
1998	39576,3	395623	608940	-32,4
1999	39381,9	372049	644850	199,6
2000	39470,6	379892	661298	38,1
2001	39231,9	382962	662602	15,7
2002	38924,0	398911	693450	27,0
2003	38642,4	426736	708257	23,7
2004	38349,8	428230	688508	693,9
2005	38754,9	639818	495272	

Указание: обратите внимание на размерность используемых переменных.

#### Задача 4

На основе известных данных о числе родившихся, умерших и абсолютной величине общего прироста населения, оцените естественный и миграционный прирост населения в следующих странах мира за 1950 – 55 и 1995 – 2000 гг.

Страны	1950 – 1955			1995 – 2000		
	Ежегодный прирост (в тыс.)	Родившиеся за год (в тыс.)	Умершие за год (в тыс.)	Ежегодный прирост (в тыс.)	Родившиеся за год (в тыс.)	Умершие за год (в тыс.)
Китай	10849	25370	14547	11157	20206	8669
Индия	7507	16589	9397	16367	25380	8733
США	2652	3993	1562	2897	3997	2349
Россия	1842	2592	908	-530	1286	2103
Германия	390	1106	771	446	797	931
Великобритания	117	808	595	104	753	659
Франция	320	830	544	277	725	524
Израиль	98	49	10	173	109	33
Кувейт	9	8	2	-90	46	4
Канада	400	409	129	322	405	202
Пакистан	936	2071	1193	3423	5036	1169
Япония	1238	2052	812	306	1237	931
Австралия	196	200	82	196	259	129
Новая Зеландия	46	52	19	40	58	28
ЮАР	340	631	295	880	1225	347
Кот Д Ивуар	89	158	83	402	494	168
Алжир	192	471	221	635	816	172
Мексика	800	1347	507	1584	2357	453
Турция	610	1076	525	948	1349	401
Португалия	41	205	100	-11	112	107
Испания	238	581	292	71	392	353
Филиппины	585	1106	438	1412	2008	416

Нидерланды	127	231	79	106	195	135
------------	-----	-----	----	-----	-----	-----

Источник: UN Population Division Database

Как изменилось соотношение естественного и миграционного прироста в этих странах? Прокомментируйте полученные результаты.

#### Задача 5

По данным ЦСУ СССР численность населения Таджикистана на 1 января 1979 г. составляла 3801 тыс. человек, на 1 января 1980 г. – 3901 тыс. человек. Согласно оценкам Госкомстата численность населения Чукотской АО на 1 января 1993 г. равнялась 124 тыс. человек, на 1 января 1994 г. – 113 тыс. человек. Рассчитайте коэффициенты общего прироста и темпов прироста населения. Чем обуславливаются различия между названными показателями?

#### Задача 6

Основываясь на результатах переписей населения, оцените среднегодовой прирост общей численности, а также городского и сельского населения России за все межпереписные периоды. Прокомментируйте полученные результаты.

	Все население	Городское население	Сельское население
1897	67,5	9,9	57,6
1926	92,8	16,5	76,3
1939	108,4	36,3	72,1
1959	117,5	61,6	55,9
1970	130,1	81,0	49,1
1979	137,6	95,4	42,2
1989	147,4	108,4	39,0
2002	145,5	106,5	38,7

#### Задача 7

Пусть численность населения России с 2003 года сокращается с темпом, зафиксированным в 1989 – 2002 гг. Через сколько лет население России сократится в 2 раза? Оцените численность населения России в 2010 году.

Указание: используйте данные Приложения 1.

#### Задача 8

Какой была бы численность населения России в 1926 году, если бы не было Первой мировой и Гражданской войн, а среднегодовые темпы прироста составляли в 1897 – 1926 гг. 2%?

#### Задача 9

Какой была бы численность населения России в 1959 году, если бы не было Второй мировой войны, а среднегодовые темпы прироста в 1939 – 1959 гг. составляли 1,5%?

#### Задача 10

Основываясь на приведенных ниже оценках известного отечественного ученого Б.Ц. Урланиса, оцените среднегодовые темпы прироста численности населения европейских империй (в соизмеримых границах) для указанных периодов времени. Объясните особенности динамики численности населения для каждой из стран. Сравните полученные результаты и объясните обнаруженные Вами различия в темпах прироста между странами.

Численность населения европейских империй (в тысячах):

Страны	годы						
	1600	1650	1700	1750	1800	1850	1900
Германия	14,6	10,3	13,5	18,9	24,3	35,4	56,4
Франция	17,2	18,8	20,4	22	27,3	34,9	38,9
Великобритания	5,2	5,7	6,8	7,5	19,9	21	36,8
Австро-Венгрия	12,8	14,2	15,5	18,3	24,3	32,6	47,2
Россия <sup>*</sup>	18,3	18,3	21	24	39	61,6	111,2

Источник: Урланис Б.Ц., *Рост народонаселения Европы. М., 1940.*

Примечание: <sup>\*</sup>150 губерний Европейской части.

Все данные приведены в неизменных границах.

#### Задача 11

На основе следующих данных о численности населения континентов оцените:

- удельные веса каждого континента в общей численности населения мира;

- среднегодовой прирост численности населения каждого континента за соответствующие периоды времени.

Прокомментируйте полученные результаты.

Численность населения континентов (в млн. человек):

	1800	1900	1950	2000	2050
Мир в целом	978	1650	2519	6057	9332
Азия	630	925	1399	3672	5428
Африка	107	133	221	794	2000
Европа	208	430	548	727	603
Латинская Америка	24	74	167	519	806
Океания	2	6	13	31	47
Северная Америка	7	82	172	314	438

Источник: UN Database

#### Задача 12

Пусть численность населения некоторой страны равно 100 миллионов человек. Пусть население этой страны а) увеличилось в 2 раза, б) уменьшилось в 2 раза. На сколько процентов население увеличилось в случае а) и сократилось в случае б).

#### Задача 13<sup>93</sup>

Согласно оценкам, численность населения СССР на 1 января 1941 г. составляла 191 млн. человек, а на 1 января 1946 г. – 170 млн. человек. Предполагая, что в 1941 – 1945 гг. население увеличивалось с неизменным коэффициентом прироста, равным 10%, оцените общие демографические потери населения СССР за годы Великой Отечественной Войны.

#### Задача 14

Численность населения страны равна 1 млн. человек. Пусть численность населения увеличивается на 3% ежегодно. Чему будет равна численность населения через 100 лет? Выполните расчет, пользуясь формулой

<sup>93</sup> См.: «Потери населения» в «Народонаселение. Энциклопедический словарь». М., 1994.

геометрической прогрессии и экспоненциальной функцией. Сравните полученные результаты.

#### Задача 15

Численность населения Москвы по данным городской переписи составила на 15 марта 1923 г. 1542,9 тыс. человек, по данным Всеобщей переписи населения на 17 декабря 1926 г. – 2025,9 тыс. человек. Оцените численность населения города на 1 мая 1924 г. и на 7 ноября 1925 г.

Указание: предположите, что численность населения изменялась по экспоненциальному закону.

#### Задача 16

Из формулы геометрической прогрессии  $P(K) = P(0) * (1 + x)^K$  получите формулу экспоненциального роста населения  $P(T) = P(0) * e^{rT}$ .

#### Задача 17

Известна численность Санкт-Петербурга за 1959, 1979 и 2002 годы (в тыс. человек): 3390, 4588, 4700. Предположим, что численность населения города изменяется по логистической кривой. Оцените ее параметры. Вычислите численность населения города в 1970 и 1989 годах. Сравните полученные оценки с переписными данными, которые соответственно равнялись 4033 и 5024 тыс. человек.

#### Задача 18

Дана численность населения США. Предположим, что рост населения изменяется а) по логистической кривой б) по экспоненциальной функции с меняющейся скоростью роста.

Год	Численность населения (в млн. человек)
1800	5,3
1820	9,6
1840	17,1
1860	31,4

1880	50,2
1900	76,2
1920	106
1940	132,1
1960	179,3
1980	226,5
2000	281,4

Источник: U.S. Statistical Yearbook 2000. Bureau of Census. Washington. 2002.

- Постройте логистическую кривую;
- Определите параметры экспоненциальной функции с меняющейся скоростью роста;
- Оцените с помощью построенных функций численность населения США в промежуточные годы, кратные десяти.
- Сравните полученные результаты с реальными данными:

1790	1810	1830	1850	1870	1890	1910	1930	1950	1970	1990
3,9	7,2	12,9	23,2	39,8	63	92,2	123,2	151,3	203,3	248,7

- Какая из функций дает лучшее приближение?
- Выполните прогноз численности населения США на 2020 и 2040 г.

#### Задача 19

- Проверьте модель С. Капицы с помощью следующих оценок численности населения Земли (в млн. человек):

- 10000	1	500	1000	1500	1750	1800	1900	1950	2000
10	300	206	275	460	720	978	1650	2519	6057

- Постройте свою гиперболическую модель роста населения Земли.

#### Задача 20

Предположим, что все человечество произошло от Адама и Евы в 10000 г. до н.э. Пусть численность населения увеличивалось по экспоненте и в 1800 году достигла 1 млрд. человек. Каков был темп прироста? Находится ли он в пределах допустимых с демографической точки зрения величин?

#### Задача 21

Выведите формулу удвоения численности населения.

*Задача 22*

По оценкам ООН среднегодовой коэффициент общего прироста населения в 1990 – 1995 гг. был равен: в России 0,02%, в Китае 1,09%, в Индии 1,76%, в США 1% . Исходя из этих параметров, оцените период удвоения численности населения каждой страны и сравните полученные результаты.

*Задача 23*

Сколько раз удваивалась численность франко-канадцев, если в 1700 году их насчитывалось около 10 тыс. человек, а в 1970 году – 5,5 млн. человек?

*Задача 24*

После введения воинской повинности среди немецких колонистов в 1872 году из России в Америку эмигрировали все члены религиозной общины гуттеритов в количестве 800 человек. В 1965 году в США и Канаде насчитывалось 16500 гуттеритов. Каков среднегодовой темп прироста численности общины? Сколько раз удваивалась ее численность за указанный период времени?

*Задача 25*

В некоторой гипотетической стране в 1700 году родилось 1000 детей, в 2000 году – 100000. Предполагая, что число рождений увеличивалось по экспоненциальной формуле с фиксированным коэффициентом прироста, определите, сколько людей жило в стране с 1700 по 2000 год.

*Задача 26*

Пусть в момент  $t_1$  родилось  $b_1$  детей, а в момент  $t_2$  родилось  $b_2$  детей. Рассчитайте, сколько всего детей должно было родиться за период  $(t_1, t_2)$ , если

- Число рождений увеличивалось по формуле средней арифметической;
- Число рождений увеличивалось по средней геометрической или экспоненциальной функции;

- Выразите разницу между полученными результатами для средней арифметической и средней геометрической как функцию от  $(t_1 - t_2)$ .

*Задача 27\**

Пусть в течение  $t$  лет в конце каждого года на некоторую территорию прибывало 1000 иммигрантов. Пусть в начальный момент времени страна была незаселенной, а естественный прирост иммигрантского населения был постоянным и равнялся  $r$ . Какой была численность населения страны через  $t$  лет? Через сколько лет численность рожденных на территории людей превысила численность иммигрантов?

*Задача 28*

А) Рассмотрим гипотетическое население, которое состоит из двух групп, численность каждой из которых равна 100000. Пусть численность первой группы растет по экспоненте с постоянным коэффициентом прироста, равным 0,02, а второй группы – по экспоненте с постоянным коэффициентом прироста, равным 0,04. Чему равен темп прироста населения для страны в целом?

Б) Предположим, что население этой страны было однородным, а его численность равнялась 200000. Пусть ежегодный прирост этого населения равнялся 0,03.

Оцените численность населения в случае А) и в случае Б), если  $t=5$ .

*Задача 29\**

Пусть объем нового жилищного строительства зависит от двух факторов: (1) состояния построенного в прошлом жилищного фонда, (2) прироста численности населения. Предположим, что все жилье, построенное в прошлом, имеет одинаковый срок эксплуатации, после завершения которого оно полностью реконструируется. При следующих гипотезах:

- численность населения возрастает в геометрической прогрессии с темпами прироста 0,5%, 1%, 2%, 3%;
- срок эксплуатации жилья равен 25 лет, 50 лет;
- масштаб потребностей населения в жилье не меняется.

оцените интенсивность жилищного строительства, а также интенсивность нового жилищного строительства и реконструкции старого жилищного фонда.

Как соотносятся интенсивности реконструкции и нового жилищного строительства при разных гипотезах о темпах роста населения и сроках эксплуатации жилого фонда?

*Задача 30\**

Исследуйте модель Солоу<sup>94</sup> по следующим направлениям:

- (А) как связаны рост населения и рост ВВП;
- (Б) как связаны рост населения и доход на душу населения;
- (В) как рост населения влияет на различия между богатыми и бедными странами в производстве ВВП на душу населения;
- (Д) как рост населения влияет на уровень накопления капитала.

*Задача 31\**

Пусть  $T_0$ ,  $U_0$ ,  $R_0$  – численность всего, городского и сельского населения в некоторый момент времени 0;  $T_t$ ,  $U_t$ ,  $R_t$  – тоже население спустя  $t$  лет. Известно, что численности городского и сельского населения изменяются экспоненциально с постоянными темпами прироста  $u$  и  $g$ . Докажите, что доля городского и сельского населения в общей численности всего населения изменяется по логистической кривой.

*Задача 32*

Рассмотрим три гипотезы о будущих изменениях численности всего населения, а также городского и сельского населения Российской Федерации. Согласно первой, их численности будут изменяться по экспоненте с постоянными темпами прироста, равным значениям, зафиксированным в 2001 году. Согласно второй, их численности будут изменяться по экспоненте с постоянными темпами прироста, равным средним темпам прироста за 1995-2001 гг. Согласно третьей, темпы их прироста изменяются в соответствии с

---

<sup>94</sup> Для тех, кто незнаком с моделью Солоу, рекомендуем обратиться к учебнику А. Менкью Макроэкономическая теория.

трендом за 1992-2002 гг. На основе этих гипотез, а также данных Приложения, вычислите:

- численность всего населения Российской Федерации в 2005, 2010 и 2015 годах;
- численность городского населения Российской Федерации в 2005, 2010 и 2015 годах;
- численность сельского населения Российской Федерации в 2005, 2010 и 2015 годах;

#### Задача 33

Из дифференциального уравнения  $dP(t)/dt = \kappa * P(t)$ , означающего, что скорость роста популяции пропорциональна ее численности, получите функцию экспоненциального роста.

#### Задача 34

Логистическая кривая является решением дифференциального уравнения  $dP(t)/dt = r * P(t) [1 - P(t)/K]$ . Докажите это утверждение.

#### Задача 35

Получите формулу утроения численности населения.

### РЕШЕНИЯ

#### Решение Задачи 28

$$A) 100000e^{0,02*5} = 110517,$$

$$100000e^{0,04*5} = 122140$$

$$110517 + 122140 = 232657$$

$$232657 = 200000e^{5*r}. \text{ Откуда } r = 0,03025$$

$$B) 200000e^{5*0,03} = 232367$$

#### Решение Задачи 29

Пусть  $C_n$  – объем жилищного строительства. Пусть  $t$  – срок эксплуатации жилья, тогда  $C_{n-t}$  – объем реконструируемого жилья, построенного  $t$  лет назад.  $C_p$  – объем нового жилищного строительства, которое должно удовлетворить спрос, обусловленный приростом населения при неизменном уровне потребностей в жилье.

$$C_n = C_{n-t} + C_p$$

Интенсивность жилищного строительства  $c_n$  равна отношению

$$c_n = C_n/P_n \text{ или } c_n = C_{n-t}/P_n + C_p/P_n, \text{ где } P_n - \text{ численности населения в момент } n.$$

Но  $C_p/P_n$  равно темпам прироста населения  $r$ .

Величину  $C_{n-t}/P_n$ , исходя из гипотезы роста населения в геометрической прогрессии можно записать в виде

$$C_{n-t}/P_n = C_n/P_n \cdot (1+r)^t \text{ или для непрерывного случая } C_{n-t}/P_n = c_n/e^{tr}$$

В итоге интенсивность жилищного строительства равна

$$c_n = c_n/e^{tr}$$

Из этого уравнения можно получить, что  $c_n = e^{tr} / (e^{tr} - 1)$

### Ответы Задачи 30

(А) и (Б) В устойчивом состоянии экономики при растущем населении капитал и выпуск продукции на одного рабочего остаются неизменными. Но поскольку количество работников растет с темпом  $n$ , капитал и объем производства растут с темпом  $n$ . Следовательно, рост населения не может объяснить длительного роста уровня жизни, поскольку объем производства в расчете на одного работника в устойчивом состоянии остается постоянным. Однако рост населения может объяснить непрерывный рост валового выпуска продукции.

(В) Рассмотрим последствия ускорения роста населения. Увеличение темпа прироста населения уменьшает капиталовооруженность устойчивого состояния, что ведет к снижению производительности. Следовательно, страны с более высокими темпами роста населения будут иметь более низкий уровень ВНП на душу населения.

(Д) Рост населения влияет на уровень накопления по Золотому правилу. Пусть потребление на одного работника равно

$c = y - i$ , где  $y$  – продукция, произведенная одним работником;

$i$  – инвестиции в расчете на одного работника.

Поскольку устойчивый объем производства есть  $f(k^*)$ , где  $k^*$  – капиталовооруженность устойчивого состояния, а инвестиции устойчивого состояния – это  $(\delta + n)k^*$ , где  $\delta$  – норма выбытия капитала,  $n$  – темп роста населения (рабочей силы), устойчивый уровень потребления можно определить как

$$c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^*$$

Уровень  $k^*$ , который максимизирует потребление, таков, что  $MPK = \delta + n$  или соответственно  $MPK - \delta = n$ , где  $MPK$  – предельный продукт капитала.

В устойчивом состоянии по Золотому правилу предельный продукт капитала минус норма выбытия равен темпу прироста населения.

#### *Решение Задачи 31*

Из условий известно, что  $U_t = U_0 e^{ut}$  и  $R_t = R_0 e^{rt}$ . Далее можно записать:

$$U_t / R_t = U_t / (T_t - U_t) = U_0 / R_0 e^{(u-r)t} = U_0 / R_0 e^{dt}, \text{ где } d = u - r. \text{ Тогда, } U_t / T_t = (U_0 / R_0 e^{dt}) / (1 + U_0 / R_0 e^{dt})$$

## РАЗДЕЛ 10. ДЕМОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОГНОЗЫ

### 10.1 ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**Демографические прогнозы** (от греческого *prognosis* – предвидение, предсказание) представляют собой оценки основных параметров развития населения стран, их регионов или населенных пунктов в будущем на основе выбранных гипотез относительно изменений в уровнях рождаемости, смертности и миграции. В отечественной литературе демографические прогнозы подразделяются на реалистические, которые направлены на наиболее точное предсказание будущих демографических изменений, и аналитические, главная цель которых заключается в исследовании влияния рождаемости, смертности и миграции на рост и структуры населения. Собственно реалистические прогнозы в зарубежной литературе и называют демографическими прогнозами (*forecast*), а аналитические прогнозы – **перспективными оценками населения** (*population projection*). Перспективные оценки населения помогают ответить на многие важные вопросы, такие как, например: «Каким должен быть уровень рождаемости или величина миграционного прироста в России, чтобы численность ее населения не сокращалась?»; «Как изменится скорость демографического старения, если уровень смертности в старших возрастах уменьшится в два раза?»; «Сколько человек будет жить на Земном шаре через 150 лет?». Перспективные оценки, в отличие от прогнозов, можно делать не только для будущего, но и для прошлого времени. В этом случае их называют **ретроспективными**. С помощью таких оценок можно воссоздать демографическую ситуацию отдельных исторических периодов, скорректировать демографические данные в предшествующие межпереписные периоды, оценить потери населения в войнах и т.д.

Демографические прогнозы необходимы при решении самых разных задач. Так, на основе перспективных оценок численности и возрастно-полового состава населения количественно оцениваются потребности в новых рабочих местах, школах, врачах, жилье, продуктах питания и др. Они могут показать, как будет сокращаться площадь лесов или увеличиваться количество отходов при

условии роста населения. С помощью прогнозов можно провести демографическую экспертизу принимаемых решений и оценить количество необходимых ресурсов для решения тех или иных социальных задач. Примеры решения задач подобного типа представлены в Разделе «Функциональные прогнозы населения».

Задачи и методы прогнозирования общей численности населения с помощью трендовых моделей или аналитических функций представлены в Разделе «Демографический рост». Современные перспективные оценки и прогнозы численности и половозрастного состава населения выполняются когортно-компонентным методом, которому посвящен данный Раздел.

## 10.2. КОГОРТНО-КОМПОНЕНТНЫЙ МЕТОД ПРОГНОЗА ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ И ВОЗРАСТНО-ПОЛОВОЙ СТРУКТУРЫ

Содержание когортно-компонентного метода кроется в его названии. Как известно, каждая совокупность лиц в возрасте, например, от  $x-5$  до  $x$  лет исходного населения в момент  $t$  на начало года представляет собой когорту, которая сформировалась в период с  $t-x$  до  $t-x+5$  года.

Через  $n$  лет численность этих когорт изменится под влиянием смертности и миграции

$${}_n P_x(t+n) = P_{x-n}(t) - {}_n^{t-x} D(t, t+n) + {}_n^{t-x} \Delta M_x(t, t+n) \quad (1)$$

где  ${}_n P_{x-n}(t)$  – численность когорты, находящейся в возрасте от  $x-n$  до  $x$ , в начальный момент времени  $t$ ;

${}_n P_x(t+n)$  – численность той же когорты через  $n$  лет;

${}_n^{t-x} D(t, t+n)$  – число умерших из когорты ( $t-x, t-x+n$ ) годов рождения за период  $(t, t+n)$ .

${}_n^{t-x} \Delta M(t, t+n)$  – миграционный прирост когорты ( $t-x, t-x+n$ ) годов рождения за период  $(t, t+n)$ .

В то же время за период  $n$  появятся новые когорты, численность которых будет равна

$$P_0(t+n) = B(t, t+n) - {}_n^t D(t, t+n) + {}_n^t \Delta M_0(t, t+n) \quad (2)$$

где  $B(t, t+n)$  – число родившихся за период  $(t, t+n)$ .

В механизме когортно-компонентного метода заложена именно такая логика для оценки численности возрастно-половых групп. Поэтому метод называется когортным. В тоже время, как видно из уравнений (1) и (2), основной метода является уравнение демографического баланса, включающее все три компоненты демографического роста – рождения, смерти и миграцию. Поэтому метод также называется компонентным. Но для реализации метода нужны данные по динамике каждой из трех компонент в будущем. Их получают из специальных прогнозов рождаемости, смертности и миграции.

Аналитические и трендовые непрерывные модели позволяют получить оценки общей численности населения для любого момента в будущем. Когортно-компонентный метод представляет собой дискретную модель демографической динамики: население рассчитывается только на определенные моменты времени через равные периоды, называемые шагом прогнозирования. Шаг прогнозирования задается шириной интервала возрастной группы начального населения и равен, как правило, одному или пяти годам. Так, если возрастная структура представлена в виде распределения населения по пятилетним группам на 1 июля 2005 года, то результат первого шага прогноза относится к 1 июля 2010 года, второго – к 1 июля 2015 года и т.д. Эти даты, на которые выполняется прогноз, называются опорными точками прогнозирования. На каждом шаге прогнозирования выполняются три операции:

- (1) Вычисление численности возрастно-половых групп на конечный момент;
- (2) Вычисление чисел родившихся и доживших из них к конечному моменту;
- (3) Учет мигрантов, а также чисел родившихся и умерших среди них.

Оценки численности возрастно-половых групп в иные моменты времени получаются путем интерполирования результатов прогноза между двумя ближайшими опорными точками. Реализация прогноза численности и возрастно-полового состава населения когортно-компонентным методом состоит из следующих этапов.

1. **Определение периода прогнозирования.** Начальным (опорным) годом для прогноза обычно является последний год, для которого имеется надежная информация о возрастно-половом составе населения.

Горизонт прогнозирования (число лет, на которое выполняется прогноз), в зависимости от задач, может составлять 5-10 лет (краткосрочные прогнозы), 10-30 лет (среднесрочные) и более 30 лет (долгосрочные).

2. **Сбор и коррекция данных.** Как минимум, для начального года должны быть в наличии надежные данные о численности возрастно-половых групп. Также необходимо собрать информацию для разработки гипотез о перспективах рождаемости, смертности и миграции. В условиях неполных демографических данных для разработки гипотез и реализации прогноза следует выбрать подходящие модельные таблицы смертности, а также рождаемости и миграции.
3. **Разработка гипотез для прогностических сценариев.** Гипотезы представляют собой фактически прогноз рождаемости, смертности и миграции. В каждой из гипотез выделяют две составляющие, первая из которых характеризует масштаб процесса, вторая – его возрастную модель. Так, гипотеза рождаемости включает в себя информацию (1) об общем уровне рождаемости в виде суммарного коэффициента рождаемости и (2) о возрастной модели рождаемости, т.е. об относительном распределении родившихся у матерей во всех репродуктивных возрастах за определенный период времени. В гипотезе об изменениях в смертности представлены (1) оценки ожидаемой продолжительности предстоящей жизни с рождения, отражающей общий уровень смертности и (2) возрастные модели смертности, отражающие уровень смертности в отдельных возрастных группах (таблицы смертности). В гипотезе о будущих тенденциях миграции выделяют (1) оценку величины миграционного прироста с разбивкой по полу для каждого года прогнозируемого интервала и (2) распределение миграционного прироста по возрасту.
4. **Реализация прогноза.** Для выполнения расчетов существует специальное программное обеспечение, в том числе разработанное для широкого доступа, например, Abacus, Demproj 4, RUP и др. На выходе результаты вычислений включают: а) оценки численности возрастно-половых групп; б) оценки чисел родившихся, умерших и миграционный прирост; в) общие демографические коэффициенты, нетто и брутто коэффициенты воспроизводства.

5. **Проверка результатов.** Результаты прогноза должны быть тщательно проверены. Во-первых, это позволит обнаружить ошибки, допущенные при сборе или вводе данных. Во-вторых, это позволит уточнить гипотезы для старых, а также разработать гипотезы для новых прогностических сценариев.
6. **Разработка альтернативных сценариев.** После проверки результатов на основе измененных гипотез реализуются новые прогностические сценарии. Вообще при прогнозировании численности и возрастно-полового состава населения разрабатывается несколько прогностических сценариев. Чаще всего рассматриваются «низкий», «средний» и «высокий» сценарии, каждый из которых основан на определенной комбинации гипотез рождаемости, смертности и миграции. Результаты всех прогностических сценариев дают представление о вероятных изменениях демографических характеристик страны или региона в будущем.

Имеется несколько способов получения перспективных оценок параметров рождаемости, смертности и миграции на третьем этапе выполнения прогноза:

- **Анализ временных рядов.** Однако при всей разработанности соответствующих методов стоит заметить, что прошлые тенденции не могут долго оставаться неизменными.
- **Демографические методы.** Например, ожидаемые величины суммарного коэффициента рождаемости могут оцениваться на основе когортных показателей рождаемости или по результатам опросов об ожидаемом и желаемом числе детей; прогнозирование величины ожидаемой продолжительности предстоящей жизни может осуществляться на основе анализа смертности по причинам смерти и др.
- **Метод аналогий.** При разработке гипотез можно опираться на опыт (закономерности изменений в рождаемости, смертности и миграции)

других стран или регионов, ушедших вперед в своем демографическом развитии.

- **Модели социально-демографического развития.** При разработке гипотез можно опираться на перспективы социально-экономического развития. Существуют теории, которые объясняют эти зависимости (теория человеческого капитала, демографических циклов, модернизации и др.).
- **Учет правительственных программ (нормативные прогнозы).** Если у правительства страны, администрации региона или населенного пункта существуют определенные демографические цели, то в качестве одного из прогностических сценариев можно использовать тот, в котором ожидаемые величины демографических показателей равны значению целевых показателей.
- **Экспертные оценки,** которые получены в ходе опроса экспертов.
- **Учет опыта международных и национальных организаций, выполняющих демографические прогнозы.** При разработке национального прогноза следует познакомиться с гипотезами, сценариями и результатами прогноза, выполненного для данной страны в международных организациях, например, в ООН. Гипотезы, использованные в национальных прогнозах, должны учитываться при разработке гипотез для отдельных регионов и городов страны.

### 10.3. ДЕМОГРАФИЧЕСКИЙ ПРОГНОЗ ДЛЯ ЗАКРЫТОГО НАСЕЛЕНИЯ

Пусть требуется выполнить прогноз численности возрастно-половых групп для закрытого населения, т.е. населения, не подверженного миграции. В качестве примера возьмем начальное население с длиной возрастного интервала 5 лет. Следовательно, шаг прогнозирования также будет равен 5 годам.

**Шаг 1.** Вычислим численность мужчин и женщин в возрасте от  $x$  до  $x+5$  лет. Вычисления производятся по формуле

$$P^i(x, t+5) = P^i(x-5, t) * S^f(x-5), \quad (1)$$

где  $P^i(x-5, t)$  – численность мужчин ( $i=m$ ) или женщин ( $i=f$ ) в возрасте от  $x-5$  до  $x$  лет в момент времени  $t$ .

$P^i(x, t+5)$  – численность мужчин ( $i=m$ ) или женщин ( $i=f$ ) в возрасте от  $x$  до  $x+5$  лет в момент времени  $t+5$ .

$S^i(x-5)$  – **коэффициент дожития**, показывающий, какая часть мужчин ( $i=m$ ) или женщин ( $i=f$ ) в возрасте от  $x-5$  до  $x$  лет доживет до момента времени  $t+5$  в стационарном населении соответствующих таблиц смертности. В отечественной литературе их также называют **«коэффициентами передвижки»**, поскольку они показывают, какая часть поколения доживет или «перейдет» за шаг прогнозирования в следующую возрастную группу (Рис. 10.1).

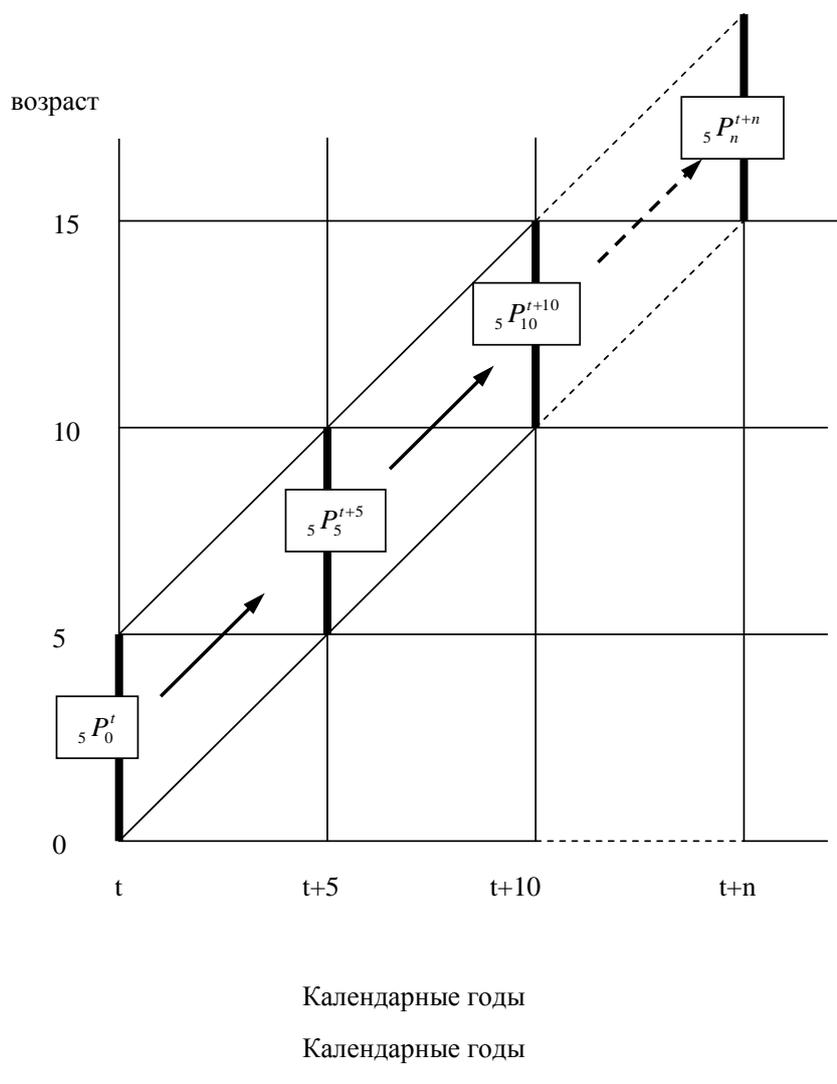


Рис. 10.1 Схема передвижки возрастов

Коэффициенты передвижки для всех возрастных групп, за исключением последней, рассчитываются следующим образом:

$$S^i(x-5) = \frac{{}_5L^i(x)}{{}_5L^i(x-5)}$$

где  ${}_5L^i(x)$  – численность мужчин ( $i=m$ ) или женщин ( $i=f$ ) в стационарном населении таблиц смертности в возрасте от  $x$  до  $x+5$  лет.

Специфика последней возрастной группы заключается в том, что она является открытой: «от 85 лет и старше» (85+), «от 100 лет и старше» (100+) и

др. Через 5 лет, например, группа «от 85 лет и старше» будет состоять из двух совокупностей. Во-первых, в нее войдут дожившие из тех, кому пять лет назад было 80-84 года. Во-вторых, в ней останутся представители самой группы «от 85 и старше», поскольку через 5 лет часть из них будут живы. В итоге, перспективная численность последней возрастной группы определяется по формуле:

$$P^i(x+\infty, t+5) = [(P^i(x+\infty, t) + P^i(x-5, t))] \cdot \frac{T^i(x)}{T^i(x-5)}, \quad (2)$$

где  $P^i(x+\infty, t)$  – численность мужчин ( $i=m$ ) или женщин ( $i=f$ ) в возрасте от  $x$  лет и старше в момент времени  $t$  (сумма  $P^i(x+\infty, t) + P^i(x, t)$  равна численности населения в возрасте от  $x-5$  лет и старше);

$T^i(x)$  – число мужчин ( $i=m$ ) или женщин ( $i=f$ ) в стационарном населении таблиц смертности в возрасте от  $x$  лет и старше.

Отношение  $\frac{T^i(x)}{T^i(x-5)}$  определяет последний в ряду коэффициент передвижки  $S^i(x)$ , который показывает, какая часть мужчин ( $i=m$ ) или женщин ( $i=f$ ) в возрасте от  $x$  лет и старше доживет до момента времени  $t+5$  в стационарном населении соответствующих таблиц смертности. Все показатели  ${}_5L^i(x)$ ,  $T^i(x)$  и коэффициенты передвижки  $S(x)$  оцениваются для каждого будущего прогнозного интервала на этапе разработки гипотез смертности для демографического прогноза.

**Шаг 2.** Чтобы рассчитать численность нулевой возрастной группы (или численность населения в возрасте от 0 до 5 лет), необходимо рассчитать число родившихся за данный год и ввести поправку на детскую (при шаге прогнозирования 1 год для однолетних групп – младенческую) смертность. Ожидаемое число родившихся рассчитывается на основе гипотетических оценок возрастных коэффициентов рождаемости  ${}_5F(x)$  для прогнозного интервала. Число детей, родившихся у женщин в возрасте от  $x-5$  до  $x$  лет в течение прогнозного периода от  $t$  до  $t+5$  года, равно

$$B^x(t, t+5) = {}_5F(x) * 5 * \overline{P^f(x, t)},$$

где  $\overline{P^f}(x,t)$  – средняя численность женщин в каждой возрастной группе (x-5,x) за прогнозный период (t,t+5). Умножение  $\overline{P^f}(x,t)$  на длину интервала (5 лет) позволяет оценить общую численность женщин в каждой возрастной группе, живших в течение прогнозного периода, или, точнее говоря, общее число человеко-лет, прожитых женщинами. Среднюю численность женщин можно рассчитать как среднюю арифметическую от численности женщин в начале и конце периода, если темпы роста населения низкие, или как среднюю геометрическую, если численность населения изменяется быстро. Общее число родившихся за период (t, t+5) рассчитывается по следующей формуле (используется средняя арифметическая оценка средней численности женщин):

$$B(t,t+5) = \sum_{15}^{49} {}_5F(x) \cdot \frac{5}{2} [P^f(x,t) + P^f(x+5,t+5)]$$

Чтобы распределить число родившихся по полу, необходимо учесть соотношение полов при рождении. Тогда общее число родившихся девочек будет равно  ${}^fB_x(t,t+5) = \delta \cdot B_x(t,t+5)$ , а мальчиков –  ${}^mB_x(t,t+5) = (1-\delta) \cdot B_x(t,t+5)$ , где  $\delta$  – доля девочек среди всех родившихся детей.

**Шаг 3.** На этом шаге вычисляется прогнозируемая численность мальчиков и девочек в возрасте от 0 до 5 лет в момент t+5. Для этого необходимо число родившихся детей каждого пола скорректировать на число умерших. Если рождения равномерно распределены в течение периода от t до t+5, то, как и ранее, можно воспользоваться соотношениями стационарного населения. В стационарном населении отношение числа лиц в возрасте 0-4 года к числу рождений равно:

$$\frac{{}_5L^i(5)}{5 \cdot I_0}, \text{ где корень таблицы } I_0 \text{ соответствует среднегодовому числу}$$

рождений в стационарном населении.

Таким образом, численность первой возрастной группы равна

$${}_5P_0^i(t+5) = B^i(t,t+5) \cdot \frac{{}_5L^i(0)}{5 \cdot I_0}.$$

Перспективные оценки для населения с иной длиной возрастного интервала (однолетней, десятилетней и пр.) выполняются по аналогичной

методике. Необходимо только внести поправки, связанные с изменением длины интервала.

*Пример 1*

*Известны численность и возрастно-половой состав (по пятилетним группам) населения некоторой страны (Азербайджана), а также перспективные таблицы смертности, оценки суммарного коэффициента рождаемости и распределение числа родившихся по возрасту матерей. Требуется узнать, какой будет численность населения и возрастно-половой состав населения страны через пять лет.*

*Решение:*<sup>95</sup>

1) Расчет численности возрастно-половых групп от 5 лет и старше ( $l_0=100000$ ):

Возраст	Численность населения в момент времени $t=0$ (тыс.чел.)	Число живущих в стационарном населении	Коэффициенты передвижки	Прогнозируемая численность населения, $t=5$ (тыс. чел.)
	$P^j(x,0)$	${}_5L(x)$	$S^j(x+5,5)$	$P^j(x,5)$
Мужчины				
0-4	3289,1	494225		?
5-9	4239,4	493378	0,99829	3283,5
10-14	6082,6	492696	0,99862	4233,5
15-19	5970,0	491126	0,99681	6063,2
20-24	5421,8	486643	0,99087	5915,5
25-29	5238,6	478567	0,98341	5331,9
30-34	4804,0	467808	0,97752	5120,8
35-39	5904,8	454020	0,97053	4662,4
40-44	6120,7	435450	0,9591	5663,3
45-49	5396,6	411265	0,94446	5780,7
50-54	3893,5	379197	0,92203	4975,8
55-59	2522,7	338903	0,89374	3479,7
60-64	3621,4	291473	0,86005	2169,7
65-69	2317,1	237171	0,8137	2946,7
70-74	2033,8	179369	0,75629	1752,4
75-79	744,4	123113	0,68637	1395,9
80-84	334,6	74366	0,60405	449,6
85+	266,1	61233	0,45157	151,1

<sup>95</sup> Все расчеты выполнялись с точностью до 0,1.

Всего	68201			
Женщины				
0-4	3120,9	495461		
5-9	4024,7	494729	0,99852	3116,2
10-14	5847,5	494154	0,99884	4020,0
15-19	5799,7	493337	0,99835	5837,9
20-24	5316,7	491814	0,99691	5781,7
25-29	4971,8	489418	0,99513	5290,8
30-34	4689,5	486302	0,99363	4940,1
35-39	5974,5	482363	0,9919	4651,5
40-44	6396,4	477012	0,98891	5908,3
45-49	5885,4	469141	0,9835	6290,9
50-54	4472,2	457988	0,97623	5745,5
55-59	3264,3	443038	0,96736	4326,2
60-64	5093,5	420525	0,94919	3098,4
65-69	3756,8	384894	0,91527	4661,9
70-74	4087,8	331599	0,86153	3236,6
75-79	2326,1	259040	0,78118	3193,3
80-84	1209,2	173012	0,6679	1553,6
85+	1121,1	136188	0,44045	532,6
Всего	77358,2			

Источник данных: возрастная структура – United Nations Population Database

2) Расчет числа родившихся детей за пятилетний прогнозный период.

Перейдем от суммарного коэффициента рождаемости, равного 2,1, и распределения родившихся по возрасту матерей к возрастным коэффициентам рождаемости с помощью формулы

$${}_5F(x) = \frac{TFR}{5} \cdot \beta(x),$$

где  $\beta(x)$  – доля детей, рожденных женщинами в возрасте от  $x$  до  $x+5$  лет.

Результаты расчетов представлены в таблице:

Возраст	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
Доля родившихся в возрасте (x,x+5)	0,081	0,251	0,245	0,195	0,143	0,059	0,026
Возрастные коэффициенты рождаемости	0,034	0,105	0,103	0,082	0,060	0,025	0,011

Оценим среднюю численность женщин в репродуктивных возрастах для прогнозного интервала (средняя арифметическая оценка):

Возраст	Численность женщин в момент $t=0$ (тыс.чел.)	Численность женщин в момент $t=5$ (тыс.чел.)	Средняя численность женщин в интервале (0,5) (тыс. чел.)
15-19	5799,7	5837,9	5818,8
20-24	5316,7	5781,7	5549,2
25-29	4971,8	5290,8	5131,3
30-34	4689,5	4940,1	4814,8
35-39	5974,5	4651,5	5313,0
40-44	6396,4	5908,3	6152,3
45-49	5885,4	6290,9	6088,1

Вычислим среднегодовое число рождений в интервале (0,5)

Возраст	Возрастные коэффициенты рождаемости	Средняя численность женщин в интервале (0,5), (тыс. чел)	Среднегодовое число рождений в интервале (0,5), (тыс. чел.)
15-19	0,03483	5818,8	202,7
20-24	0,10793	5549,2	598,9
25-29	0,10535	5131,3	540,6
30-34	0,08385	4814,8	403,7
35-39	0,06149	5313,0	326,7
40-44	0,02537	6152,3	156,1
45-49	0,01118	6088,1	68,1
Всего			2296,8

Общее число рождений за пять лет будет равно  $2296,8 * 5 = 11484$

Распределим родившихся по полу при условии, что при рождении на 100 девочек рождается 105 мальчиков:

Численность родившихся мальчиков равна  $11484 * 1,05 / (1 + 1,05) = 5882$

Численность родившихся девочек равна  $11484 - 5882 = 5602$

3) Определим прогнозируемую численность первой возрастной группы.

Используя формулу  $\frac{{}_5L^i(5)}{5 \cdot l_0}$ , где  $l_0=100000$ , получим поправочные коэффициенты на смертность мальчиков  $494225/500000=0,98845$  и девочек  $495461/500000=0,99092$ .

Тогда численность возрастной группы от 0 до 5 лет будет равна:

Мужчины:  $5882 * 0,98845 = 5814,1$

Женщины:  $5602 * 0,99092 = 5551,1$ .

$$P^i(x+5, t+5) = P^i(x+5, t+5) * \Delta M^i(x+5, t+5) = P^i(x+5, t+5) * -E^i(x+5, t+5) + I^i(x+5, t+5)$$

#### 10.4. ПРОГНОЗ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ С УЧЕТОМ МИГРАЦИИ

Демографический прогноз для открытого населения фактически можно представить в виде двухступенчатой процедуры. Сначала исходное население рассматривается как закрытое, для него выполняется стандартный прогноз когортно-компонентным методом. Затем полученная возрастно-половая структура корректируется с учетом миграции.

Существует несколько способов учета миграции в прогностических моделях. Их выбор определяется тем, какие данные использовались при разработке миграционных гипотез. Наиболее доступными и используемыми являются данные о миграционном приросте. В этом случае прогнозную оценку численности возрастно-половой группы можно представить в виде:

$${}_5P_x^i(t+5) = {}_5\hat{P}_x^i(t+5) + {}_5\Delta M_x^i(t, t+5), \quad (3)$$

где  ${}_5\hat{P}_x^i(t+5)$  – прогнозируемая численность мужчин ( $i=m$ ) или женщин ( $i=f$ ) в возрасте от  $x$  до  $x+5$  лет в момент времени  $t+5$  населения без учета миграции;

${}_5\Delta M_x^i(t, t+5)$  – миграционный прирост мужского ( $i=m$ ) или женского ( $i=f$ ) населения в возрасте от  $x$  до  $x+5$  лет за период  $(t, t+5)$ ;

${}_5P_x^i(t+5)$  – прогнозируемая численность мужчин ( $i=m$ ) или женщин ( $i=f$ ) в возрасте от  $x$  до  $x+5$  лет в момент времени  $t+5$  населения с учетом миграции.

Данные о миграционном приросте в прогноз вводятся, как правило, непосредственно, в виде абсолютной оценки общей величины миграционного прироста и ее относительного распределения по возрастно-половым группам, и реже – через повозрастные коэффициенты миграции.

Главная трудность включения абсолютных данных о миграционном приросте в прогноз заключается в оценке умерших и родившихся среди мигрантов. Миграция представляет собой непрерывный процесс, и для того, чтобы включить ее в дискретную прогностическую модель, также приходится прибегать к некоторым допущениям. Наиболее простым из них является предположение о том, что весь миграционный прирост приходится на конец или начало прогнозного периода. Тогда в первом случае величина миграционного прироста просто прибавляется к результатам прогноза замкнутого населения, а во втором случае миграционный прирост прибавляется сразу к начальному населению. Но эти предположения далеки от реальности.

Другим простым способом включения миграции в прогностическую модель является идея разбить величину миграционного прироста в каждой возрастной группе на две половины: первая из них формируется точно в начале прогнозного интервала  $t$ , вторая – точно в конце прогнозного интервала. Первая часть миграционного прироста  ${}_5\Delta M_{x-5}^i(t, t+5)$  подвергается воздействию смертности и в течение прогнозного периода переходит в возрастную группу  $(x, x+5)$ . Вторая половина непосредственно прибавляется к численности той же возрастной группы  $(x-5, x)$ . В итоге прогнозная численность населения с учетом миграционного прироста будет равна:

$${}_5P_x^i(t+5) = \left[ \left( {}_5P_{x-5}^i(t) + \frac{{}_5\Delta M_{x-5}^i(x, x+5)}{2} \right) \cdot {}_5S_{x-5}^i \right] + \frac{{}_5\Delta M_x^i(t, t+5)}{2}$$

Итоговый вклад миграционного прироста в численность каждой возрастно-половой группы можно записать в следующем виде:

$${}_5\Delta_x^i(t+5) = \frac{{}_5\Delta M_{x-5}^i(t, t+5)}{2} \cdot {}_5S_{x-5}^x + \frac{{}_5\Delta M_x^i(t, t+5)}{2}.$$

*Задание: запишите формулу оценки численности последней возрастной группы (85+) с учетом миграционного прироста.*

Число рождений у женщин в репродуктивных возрастных группах открытого населения рассчитывается по той же формуле (1), что и для закрытого населения. Однако, в оценке среднего населения за прогнозный интервал учитывается поправка на миграционный прирост. В частности,  ${}_5P_x^f(t)$

заменяется на  ${}_5P_x^f(t) + {}_5\Delta M_x^f(t, t+5)/2$ . Таким образом, общее число рождений равно:

$$B(t, t+5) = \sum_{15}^{49} {}_5F_x \cdot 5 \cdot \frac{{}_5P_x^f(t) + {}_5\Delta M_x^f(t, t+5)/2 + {}_5P_x^f(t+5)}{2}.$$

Соответственно, вклад миграционного прироста в число рождений равен:

$$\Delta B(t, t+5) = \sum_{15}^{49} {}_5F(x) \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} \cdot {}_5\Delta_x^f(t+5).$$

В случае отрицательного миграционного прироста получим отрицательную оценку числа рождений. Отрицательная оценка числа рождений отражает потери, которые понесло население страны из-за сокращения численности потенциальных матерей в результате миграционного оттока.

Оценка численности первой группы включает в себя оценку миграционного прироста в возрасте до 5 лет:

$${}_5P_0^i(t+5) = B^i(t, t+5) \cdot \frac{{}_5L^i(0)}{5 \cdot l_0} + \frac{{}_5\Delta M_0^i(t, t+5)}{2}.$$

Другой способ учета миграционного прироста основан на использовании гипотетических оценок возрастных коэффициентов миграции, точнее, их специальной модификации. Такие коэффициенты в терминах уравнения (3) равны:

$${}_5m_x^i(t-5, n) = \frac{{}_5\Delta M_x^i(t-5, t)}{{}_5\hat{P}_x^i(t)}.$$

На практике для оценок модифицированного коэффициента миграционного прироста можно использовать следующее соотношение:

$${}_5m_x^i(t-5, n) = \frac{{}_5\Delta M_x^i(t-5, t)}{{}_5P_x^i(t) - ({}_5D_{x-5}^i(t-5, t) + {}_5D_x^i(t-5, t))/2},$$

где  ${}_5P_x^i(t)$  – реальная численность возрастно-половой группы в момент  $t$ ;

${}_5D_{x-5}^i(t-5, t)$  – число умерших мужчин ( $i=m$ ) или женщин ( $i=f$ ) в возрасте от  $x-5$  до  $x$  лет за период  $(t-5, t)$ .

При относительно небольших (по сравнению с соответствующей численностью возрастно-половых групп) миграционных потоках в качестве

оценки модифицированных коэффициентов могут использоваться обычные возрастные коэффициенты миграционного прироста.

Если есть гипотетические оценки коэффициента  ${}_5m_x^i(t)$  для будущего и спрогнозированные оценки чисел доживших  ${}_5\hat{P}_x^i(t+5)$  для закрытого населения, тогда легко получить величину миграционного прироста в каждой возрастно-половой группе  ${}_5\Delta M_x^i(t, t+5)$ :

$${}_5\Delta M(t, t+5) = {}_5\hat{P}_x^i(t+5) \cdot {}_5m_x^i(t, t+5).$$

Очевидно, перспективная численность возрастно-половой группы  $P(s, x, t+k)$  будет исчисляться по формуле (3), т.е.

$${}_5P_x^i(t+5) = {}_5\hat{P}_x^i(t+5) + {}_5\Delta M_x^i(t, t+5)$$

$${}_5m_x^i(t, t+5)$$

#### Пример 1 (продолжение)

Пусть известны также специальные возрастные коэффициенты миграционного прироста в Азербайджане. Тогда перспективная численность населения с учетом миграции будет равна:

возраст	Численность доживших до момента $t=5$ (тыс.чел)	Коэффициенты миграционного прироста	Миграционный прирост	Численность населения (тыс.чел)
	${}_5\hat{P}_x^i(t+5)$	${}_5m_x^i(t, t+5)$	${}_5\Delta M_x^i(t, t+5)$	${}_5P_x^i(t+5)$
Мужчины				
0-4	5814,1	-0,0045	-26,2	5787,9
5-9	3283,5	-0,0047	-15,4	3268,0
10-14	4233,5	-0,0053	-22,4	4211,1
15-19	6063,2	-0,0018	-10,9	6052,3
20-24	5915,5	-0,0078	-46,1	5869,4
25-29	5331,9	-0,0445	-237,3	5094,6
30-34	5120,8	-0,0576	-295,0	4825,8
35-39	4662,4	-0,0369	-172,0	4490,4
40-44	5663,3	-0,0243	-137,6	5525,7
45-49	5780,7	-0,0144	-83,2	5697,5
50-54	4975,8	0,001	5,0	4980,8
55-59	3479,7	0,0016	5,6	3485,3
60-64	2169,7	0,0016	3,5	2173,1
65-69	2946,7	0,0012	3,5	2950,2
70-74	1752,4	0,001	1,8	1754,2
75-79	1395,9	0,002	2,8	1398,7
80-84	449,6	0,005	2,2	451,9

85+	151,1	0,007	1,1	152,1
Всего	69189,8		-1020,6	68169
женщины				
0-4	5551,1	-0,0036	-19,9839	5531,1
5-9	3116,2	-0,0036	-11,2185	3105,0
10-14	4020,0	-0,0029	-11,658	4008,3
15-19	5837,9	-0,002	-11,6757	5826,2
20-24	5781,7	-0,0126	-72,8499	5708,9
25-29	5290,8	-0,0157	-83,0661	5207,8
30-34	4940,1	-0,0147	-72,6201	4867,5
35-39	4651,5	-0,0112	-52,0972	4599,4
40-44	5908,3	-0,0081	-47,8569	5860,4
45-49	6290,9	-0,0041	-25,7926	6265,1
50-54	5745,5	0,0011	6,320071	5751,8
55-59	4326,2	0,0017	7,354522	4333,5
60-64	3098,4	0,0014	4,337763	3102,7
65-69	4661,9	0,0011	5,12811	4667,0
70-74	3236,6	0,001	3,236617	3239,9
75-79	3193,3	0,002	6,386664	3199,7
80-84	1553,6	0,004	6,21451	1559,8
85+	532,6	0,006	3,195674	535,8
Всего	77736,6		-366,6	77369,9

В современных прогностических моделях вместо одной переменной «миграционный прирост» вводятся величины выбывших (эмиграция) и прибывших (иммиграция). Для оценки эмиграционного оттока используется приведенная в Разделе 8 таблица смертности с учетом миграции (таблица множественного выбытия). Для включения в прогноз потока прибывших применяется тот же метод, что и рассмотренный выше способ включения в прогноз абсолютной величины миграционного прироста. Подобный подход позволяет выделить в результатах прогноза, например, иммигрантов и их потомков, оценить их вклад в рождаемость и смертность. Очевидно, что переход от миграционного прироста к миграционным потокам с возможным последующим их разбиением на внутренние и внешние потоки делает задачу прогноза численности и возрастно-полового состава более трудоемкой. Но современное программное обеспечение и быстродействующие компьютеры позволяют относительно легко преодолеть эту трудность. Нужны только соответствующие надежные данные.

### **10.5. МНОГОРЕГИОНАЛЬНЫЙ ПРОГНОЗ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ**

На практике перед демографами часто ставится задача построения прогнозов населения не только целой территориальной системы, но и ее отдельных частей, например, мира и каждой страны, страны и ее отдельных регионов. В зависимости от имеющихся в распоряжении данных, существуют несколько подходов к реализации подобных многорегиональных прогнозов.

Пусть, например, требуется выполнить демографический прогноз для области и ее районов. С помощью когортно-компонентного метода можно оценить перспективную численность населения всего региона. Для районов этот метод часто неприменим в силу малочисленности их населения и отсутствия информации об возрастных уровнях рождаемости и смертности. Оценку общей численности населения районов можно получить, зная удельный вес каждого района по данным переписей населения. Если требуется оценить возрастную-половую структуру района, то ее можно получить на основе возрастно-половой структуры населения области посредством введения поправки на удельный вес этого района в каждой возрастно-половой группе населения области в целом.

Если известны половозрастные структуры элементов некоторой территориальной системы, если также можно оценить возрастные модели демографических процессов, то многорегиональный прогноз можно попытаться выполнить следующим образом: численность и половозрастной состав для каждого элемента территориальной системы найти когортно-компонентным методом. Однако при этом демограф может столкнуться с серьезной проблемой. Результаты прогноза численности и половозрастного состава населения, выполненного для всей территориальной системы как единого целого, вероятно, будут отличаться от перспективной оценки, полученной как сумма перспективных численностей возрастно-половых групп ее подсистем. Причина подобных расхождений кроется в межрегиональных миграционных потоках. Чтобы избежать подобных расхождений, необходимо провести с помощью специальных методов, учитывающих межрегиональные миграционные процессы, балансировку результатов прогнозов. Подобный подход используется в Отделе народонаселения ООН при расчете

перспективной численности и половозрастного состава населения мира и его основных частей как суммы перспективных оценок всех или соответствующих групп стран.

Другой подход к построению прогностических моделей, в которых учтены миграционные потоки между элементами территориальной системы, разработан в рамках так называемой «многорегиональной демографии». Он в полной мере отражает реальность, и поэтому избавлен от вышеприведенной проблемы «балансировки», но более сложен с точки зрения техники реализации и, кроме того, очень чувствителен к качеству данных о миграции. Читателям, желающим познакомиться с принципами и методами многорегиональной демографии, рекомендуем обратиться к [работам Роджерса \(1995\), Виликенса, Схоена \(1988\)](#). Самые простые примеры прогнозов с учетом межрегиональных потоков в территориальной системе, состоящей из двух подсистем, например, городской и сельской местности, можно найти также в методических рекомендациях по прогнозированию Отдела народонаселения ООН (1989).

#### 10.6. МАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ ВОСПРОИЗВОДСТВА НАСЕЛЕНИЯ

Когортно-компонентный метод прогнозирования можно записать в матричной форме. Рассмотрим пример закрытого для миграции женского населения, разбитого на пятилетние возрастные группы, последняя из которых является открытой («85 лет и старше»). Численность и возрастной состав исходного населения можно представить как вектор-столбец  $\mathbf{P}(t)$ , элементами которого являются численности отдельных возрастных групп женского населения  ${}_5P_x^f(t)$ .

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} P_0^f(t) \\ P_5^f(t) \\ \dots \\ P_{85+}^f(t) \end{pmatrix}$$

Вектор численности всех возрастных групп в момент  $(t+5)$ , за исключением самой первой группы  $P_0^f(t+5)$ , с помощью формул (1) и (2), можно записать в

виде произведения матрицы, элементами которой являются коэффициенты передвижки  $S_x^f$ , и вектора  $\mathbf{P}^f(t)$ :

$$\mathbf{P}^f(t+5) = \begin{pmatrix} ? \\ P_5^f(t+5) \\ P_{10}^f(t+5) \\ \dots \\ P_{80}^f(t+5) \\ P_{85}^f(t+5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ S_0^f & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_5^f & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & S_{75}^f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{80} & S_{80} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_0^f(t) \\ P_5^f(t) \\ P_{10}^f(t) \\ \dots \\ P_{80}^f(t) \\ P_{85}^f(t) \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы заменить знаки «?» на определенные функции, вновь обратимся к формуле, выражающей число родившихся детей за пятилетний период:

$$B^f(t, t+5) = \delta \cdot \sum_{15}^{49} {}_5F(x) \cdot \frac{5}{2} [P_x^f(t) + P_{x-5}^f(t) \cdot \frac{{}_5L_x^f}{{}_5L_{x-5}^f}].$$

Совершив несложные перестановки в формуле, читатель может привести ее к следующему виду (*Задание: покажите, как это сделать*):

$$B^f(t, t+5) = \delta \cdot \sum_{10}^{44} {}_5P_x(t) \cdot \frac{5}{2} [F_{x-5} + F_x \cdot \frac{{}_5L_x^f}{{}_5L_{x-5}^f}]$$

Численность первой группы с учетом поправки на детскую смертность можно записать как

$${}_5P_0^f(t+5) = \sum_{10}^{44} {}_5P_x(t) \cdot \left\{ \frac{5}{2} \cdot \delta \cdot [F_{x-5} + F_x \cdot S_x^f] \cdot \frac{{}_5L_0^f}{5 \cdot l_0} \right\}.$$

Обозначим выражение, стоящее в фигурных скобках, буквой  $\Phi$ . Оно представляет собой вероятность того, что женщина в возрасте от  $x$  до  $x+5$  лет родит в течение пятилетнего периода ребенка, и что этот ребенок доживет до конца пятилетнего периода. С помощью этой репродуктивной функции можно записать матрицу воспроизводства населения в ее окончательном виде:

$$A^a = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \Phi_{10}^f & \Phi_{15}^f & \dots & \Phi_{45}^f & \dots & 0 & 0 \\ S_0^f & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & S_5^f & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{10}^f & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{15}^f & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & S_{45}^f & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & S_{80}^f & S_{80}^f \end{vmatrix}$$

Квадратную матрицу  $A^f$ , построенную для женского закрытого населения, называют матрицей воспроизводства населения или матрицей Лесли. Эта матрица получила свое название в честь австралийского демографа, который первым ввел ее в научный оборот<sup>96</sup>. Произведение матрицы  $A^f$  на вектор  $\mathbf{P}(t)$  полностью определяет численность населения через пять лет, выражаемую вектором  $\mathbf{P}(t+5)$ .

Матрица, отражающая процесс воспроизводства всего населения, включает в себя две компоненты. Верхняя компонента состоит из матрицы Лесли и нулевой квадратной матрицы той же размерности. Нижняя компонента состоит из матрицы, первая строка которой повторяет первую строку матрицы Лесли, и матрицы с нулевой верхней строкой, у которой элементы под диагональю соответствуют коэффициентам дожития мужского населения:

<sup>96</sup> Leslie P.N. On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika*. Vol.33 part III. 1945. Впервые матричная алгебра была применена в демографии в 1941 г. Г. Бернарделли. См.: Таба Л. Взаимосвязи между возрастной структурой, плодовитостью, смертностью и миграцией. Воспроизводство и обновление населения. В кн.: Демографические модели. Под ред. Е.М.Андреева и А.Г.Волкова. М., 1977.

	0	0	0	$\Phi(2,15,t)$	...	$\Phi(2,k,t)$	...	$\Phi(2,49,t)$	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S(2,0,t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$S(2,1,t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$S(2,15,t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	$S(2,k,t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$S(2,49,t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$S(2,\omega,t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
=	0	0	0	$\Phi(1,15,t)$	...	$\Phi(1,k,t)$	...	$\Phi(1,49,t)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$S(1,1,t)$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		$S(1,15,t)$	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	...	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	$S(1,k,t)$		0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	...	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	$S(1,49,t)$	0	

Соответственно, умножая полный вектор, верхняя часть которого представляет собой численность возрастных групп женского населения в момент  $t$ , а нижняя – численность возрастных групп мужского населения, на общую матрицу воспроизводства  $K$ , можно получить возрастно-половую структур всего населения через пять лет. Причем, если эту процедуру повторить  $n$  раз, то получим возрастно-половую структур населения через  $t+5n$  лет:

$$P^{t+5n} = A * \dots * A * A * P^t = A^{5n} * P^t$$

Так когортно-компонентный метод реализуется в матричном виде. Очевидно, что параметры матрицы на каждом шагу прогнозирования можно менять. Модели воспроизводства в матричной форме с практической точки зрения представляют особый интерес, поскольку они наглядно отражают взаимосвязи между демографическими процессами и структурами, которые можно анализировать с помощью мощного аппарата матричной алгебры.

### ЗАДАЧИ

#### *Задача 1*

Запишите формулы когортно-компонентного метода прогноза для закрытого населения, имеющего однолетнюю возрастную структуру.

#### *Задача 2 (продолжение Задачи 1)*

Как будет выглядеть в этом случае матрица Лесли?

#### *Задача 3*

Запишите формулы когортно-компонентного метода прогноза для закрытого населения с пятнадцатилетними возрастными группами.

#### *Задача 4*

Запишите полностью матрицу Лесли по условиям, определенным в Задаче 3.

#### *Задача 5*

По данным об изменениях ожидаемой продолжительности предстоящей жизни в России (Приложение 1), постройте трендовый прогноз этого показателя

до 2025 года. Возможна ли такая динамика в будущем? В чем в данном случае заключается недостаток трендового прогноза?

#### Задача 6

В Отделе народонаселения ООН на основе обобщения мирового опыта относительно роста ожидаемой продолжительности жизни при рождении были построены три модели изменения этого показателя в зависимости от достигнутого уровня. Так, если у мужчин продолжительность жизни равняется 59 годам и предполагается, что она будет расти быстро, то через пять лет она увеличится на 2 года (до 61 года), через следующие пять лет – еще на 2 года (до 63 лет) и так далее – до максимальной отметки в 85 лет. Эти модели применялись в Отделе народонаселения для разработки известных перспективных оценок населения всех стран мира (World Population Prospects).

Таблица 10.2. Модель изменения ожидаемой продолжительности при рождении в течение пятилетнего периода, ООН.

Начальная продолжительность жизни с рождения	Быстрый рост		Средний рост		Медленный рост	
	Мужчины	Женщины	Мужчины	Женщины	Мужчины	Женщины
55.0-57.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.0	2.0
57.5-60.0	2.5	2.5	2.5	2.5	2.0	2.0
60.0-62.5	2.5	2.5	2.3	2.5	2.0	2.0
62.5-65.0	2.3	2.5	2.0	2.5	2.0	2.0
65.0-67.5	2.0	2.5	1.5	2.3	1.5	2.0
67.5-70.0	1.5	2.3	1.2	2.0	1.0	1.5
70.0-72.5	1.2	2.0	1.0	1.5	0.8	1.2
72.5-75.0	1.0	1.5	0.8	1.2	0.5	1.0
75.0-77.5	0.8	1.2	0.5	1.0	0.3	0.8
77.5-80.0	0.5	1.0	0.4	0.8	0.3	0.5
80.0-82.5	0.5	0.8	0.4	0.5	0.3	0.3
82.5-85.0	–	0.5	–	0.4	–	0.3
85.0-87.5	–	0.5	–	0.4	–	0.3

Принимая за начальную точку отсчета последние оценки ожидаемой продолжительности жизни для мужчин и женщин в России, постройте три сценария изменения этого показателя вплоть до 2030 года. Прокомментируйте полученные результаты. В чем, по Вашему мнению, заключаются достоинства и

недостатки этого метода прогнозирования показателя ожидаемой продолжительности жизни?

#### Задача 7

В терминах когортно-компонетного метода прогноза запишите:

- Долю детей, родившихся в 2000 г. и доживших до конца 2000 г.;
- Долю лиц, родившихся в 1983 г. и доживших до конца 2003 г.;
- Долю детей, родившихся в 2000 г., которые доживут до возраста 25 лет.

#### Задача 8

В таблице 1 приведена возрастная структура женщин на 1 января 1989 г.

1) постройте прогноз возрастной структуры на 1 января 1994 г. при гипотезе неизменной рождаемости и смертности на уровне 1989 г. Сравните полученную структуру с реальной. Объясните различия.

2) постройте прогноз возрастной структуры 1994 г. на 25 лет вперед при разных гипотезах, используя данные таблиц 2 и 3:

- рождаемость и смертность на уровне 1989 г.;
- рождаемость и смертность на уровне 1994 г.;
- обоснуйте Ваши собственные гипотезы о динамике рождаемости и смертности.

Сравните полученные результаты при помощи графика.

3) Проанализируйте динамику трех возрастных групп (дети, старики, трудоспособные) и изменение коэффициентов демографической нагрузки при разных гипотезах прогноза.

Таблица 1. Возрастная структура женщин на 1 января 1989 г. и 1 января 1994 г. (Россия)

возраст	P <sub>1.01.1989</sub>	P <sub>1.01.1994</sub>
0-4	5902504	4307179
5-9	5591985	5927042
10-14	5220136	5631610
15-19	4848901	5235901
20-24	4798637	4779489
25-29	6183633	4778198

30-34	6389950	6200575
35-39	5862787	6391667
40-44	3886934	5853274
45-49	4187744	3801221
50-54	5139558	4136970
55-59	4679269	4964850
60-64	5120406	4478559
65-69	3142487	4693883
70-74	2641687	2744538
75-79	2513644	2025583
80-84	1405405	1652307
85+	746721	921280

Таблица 2. Фрагмент таблиц смертности мужчин и женщин 1989 и 1994 гг. – числа живущих (Россия)

возраст	L(x) - мужчины		возраст	L(x) - женщины	
	1989	1994		1989	1994
0-4	49104	49086	0-4	49110	49098
5-9	48777	48626	5-9	48917	48697
10-14	48619	48457	10-14	48831	48600
15-19	48365	48119	15-19	48722	48454
20-24	47872	47392	20-24	48563	48237
25-29	47171	46281	25-29	48382	47960
30-34	46318	44781	30-34	48164	47590
35-39	45266	42781	35-39	47864	47058
40-44	43897	40117	40-44	47412	46254
45-49	41960	36676	45-49	46717	45069
50-54	39307	32396	50-54	45703	43391
55-59	35780	27528	55-59	44179	41146
60-64	31198	22184	60-64	41865	38119
65-69	25719	16657	65-69	38400	34045
70-74	19478	11577	70-74	33247	28643
75-79	12982	7095	75-79	26156	21629
80-84	7225	3569	80-84	17617	13671
85+	2325	1065	85+	6548	4820

Таблица 3. Возрастные коэффициенты рождаемости (число детей, родившихся в среднем у 1000 женщин данной возрастной группы)

возраст	1989	1994
15-19	52,5	49,9
20-24	163,9	120,3
25-29	103,1	67,2
30-34	54,6	29,6
35-39	22,0	10,6

40-44	5,0	2,3
45-49	0,2	0,1

Источник: Демографический ежегодник России: Стат. сб. /Госкомстат России. – М., 1997. – С. 215

#### Задача 9

Известна половозрастная структура населения России (Приложение 1), а также возрастные и суммарные коэффициенты рождаемости (Приложение 1) и показатели из таблиц смертности (Приложение 1) за 2000 г. Оцените возможный вклад рождаемости в динамику численности населения и изменения половозрастной структуры до 2020 года при следующих предположениях:

- режим смертности остается неизменным;
- возрастное распределение рождаемости постоянно;
- миграционный прирост отсутствует.

Указание: рассмотрите три гипотезы:

- 1) суммарный коэффициент рождаемости устанавливается в 2005 году на уровне, равном 1, и далее не изменяется,
- 2) с 2000 года рождаемость не изменяется,
- 3) суммарный коэффициент рождаемости к 2010 году повышается до уровня, обеспечивающего простое воспроизводство, и далее остается постоянным.

#### Задача 10

Даны возрастные коэффициенты рождаемости, показатели таблиц смертности и половозрастная структура населения Москвы за 2002 год.

Какими станут численность и половозрастная структура населения Москвы в 2017 году, если режимы рождаемости и смертности после 2002 года перестанут изменяться, а миграционный прирост отсутствует?

Возрастные группы	Численность		Точный возраст	l(x)	
	Мужчины	Женщины		Мужчины	Женщины
			0	100	100
0-4	179726	170259	1	99,61	99,685
5-9	186180	175599	5	99,473	99,601

10-14	267204	253018	10	99,386	99,542
15-19	381550	358564	15	99,258	99,452
20-24	452243	406752	20	99,021	99,341
25-29	433125	391202	25	98,664	99,192
30-34	450487	394387	30	98,352	99,003
35-39	426406	394569	35	97,935	98,764
40-44	493284	489515	40	97,356	98,405
45-49	409480	440711	45	96,432	97,848
50-54	346608	401849	50	94,969	96,955
55-59	220492	267408	55	92,178	95,257
60-64	241916	336367	60	87,732	92,6
65-69	168926	272691	65	80,293	88,273
70-74	139718	267442	70	69,605	81,258
75-79	84781	219233	75	56,106	70,482
80-84	32842	103507	80	40,187	56,207
85+	22703	77537	85+	24,854	40,206

Возрастные коэффициенты рождаемости (родившиеся на 1000 женщин):

15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
17,6	83,4	86,1	49,4	17,1	3,3	0,2

Указание: Оценки значения функции  $L(x)$  выполните, предполагая, что вероятность умереть равномерно изменяется во всех возрастных интервалах, за исключением первого.

#### Задача 11

Известны возрастные характеристики миграционного прироста населения Москвы в 2002 году. Решите Задачу 10, предполагая, что возрастное распределение и величина миграционного прироста в Москве изменяться не будут. Сравните в полученные результаты с ответами Задачи 10.

Миграционный прирост в Москве за 2002 год (тыс. человек):

	Мужчины	Женщины
0-4	10,5	7
5-9	7,5	5
10-14	6,0	4
15-19	15	10
20-24	19,5	13
25-29	18	12
30-34	15	10
35-39	13,5	9

40-44	10,5	7
45-49	7,5	5
50-54	6	4
55-59	6	4
60-64	4,5	3
65-69	3	2
70-74	1,5	1
75-79	1,5	1
80-84	3	2
85+	1,5	1
Итого	150	100

*Задача 12*

На основе данных Задачи 8 выполните прогноз численности и половозрастного состава населения для 1994 и 1999 гг. при условии сохранения режимов рождаемости смертности неизменными, и предполагая, что население России замкнутое. Используйте для этого матрицу воспроизводства. Сравните полученные результаты с решением Задачи 8, а также с реальными данными.

## РАЗДЕЛ 11. МОДЕЛЬ СТАБИЛЬНОГО НАСЕЛЕНИЯ

### 11.1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СТАБИЛЬНОГО НАСЕЛЕНИЯ

Стабильное население – теоретическое закрытое население с неизменными во времени возрастными интенсивностями рождаемости  $f(x)$ , смертности  $l(x)$  и возрастной структурой  $c(x)$ . Модель стабильного населения является упрощенным изображением процесса воспроизводства. Она строится для одного, главным образом для женского, пола. Параметры модели для противоположного пола рассчитываются на основе соотношения полов при рождении.

Великий математик Леонард Эйлер одним из первых обратился к идее стабильного населения<sup>97</sup>. Он, в частности, обнаружил, что население, в котором установился постоянный режим смертности, а число родившихся изменяется по экспоненциальному закону, будет иметь неизменную возрастную структуру. В начале 1911 г. российско-немецкий статистик Владислав Борткевич использовал гипотезу стабильного населения для исчисления возрастного состава реального населения, численность которого увеличивается с постоянным темпом прироста.

Создание теории стабильного населения с математическим обоснованием ее основных положений связано с именем американского демографа Альфреда Лотки<sup>98</sup>. Именно он, основываясь на аналогии с физическими процессами, ввел в научный оборот термин «стабильное население», что в переводе с латинского (*stabilis*) означает устойчивое население. Если режимы рождаемости и смертности стабильного населения внезапно изменятся, а затем вновь вернуться к своим прежним постоянным величинам, то возрастающая структура и общие демографические коэффициенты в этом населении постепенно также вернуться к своему равновесному состоянию. В начале XX столетия он доказал, что однополое население, в котором отсутствует миграция, а возрастные интенсивности рождаемости и смертности неизменны, будет иметь

<sup>97</sup> Euler L., Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. Histoire de l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres Belgium. Partial translation by N.Keyfitz and V.Keyfitz in Population Biology, Vol. 1. No 3, 1970.

<sup>98</sup> Полностью Лотка изложил свою теорию в работе: Lotka A.J. Théorie analytique des associations biologiques. Part II. Analyse démographique avec application particulière à l'espèce humaine. Paris, 1939.

неизменную возрастную структуру, постоянные общие коэффициенты рождаемости и смертности и коэффициент естественного прироста. Лотка назвал такое население стабильным (от латинского *stabilis* – устойчивый) по аналогии с физическими процессами. Если в стабильном населении произойдут внезапные изменения в режимах рождаемости и смертности, которые затем вернуться к своим прежним постоянным величинам, то население постепенно вернется опять к своему равновесному состоянию с неизменными возрастной структурой и общими демографическими коэффициентами.

В 1911 году в одной из первых своих работ Лотка вместе с другим американским ученым Ф. Шарпом<sup>99</sup> доказал одну из центральных в математической демографии теорем: закрытое население, в котором возрастные интенсивности рождаемости и смертности с определенного момента времени стали постоянными, со временем будет иметь неизменную возрастную структуру, постоянные общие коэффициенты рождаемости и смертности и коэффициент естественного прироста. Подобное население называют *асимптотически стабильным*, а процесс приближения его первоначальной возрастной структуры и общих демографических коэффициентов к некоторым постоянным (предельным) значениям – *стабилизацией* населения. Сам Лотка пользовался термином «стабильный» для обозначения именно такого населения. В процессе стабилизации возрастная структура населения постепенно как бы «забывает» свою первоначальную форму. Это особое свойство получило название **сильной эргодичности**. После того, как население достигнет стабильного состояния, параметры его возрастной структуры будут определяться только заданными режимами рождаемости и смертности.

В конце 1950-х гг. Э. Коул высказал предположение, что все человеческие популяции «забывают» свое прошлое<sup>100</sup>. Когда уровни рождаемости и смертности непрерывно изменяются, также непрерывно изменяется возрастная структура населения. С каждым годом влияние

<sup>99</sup> Lotka, A.J. and Sharpe, F.R. A problem in age distribution. *Philosophical Magazine*. 1911, Vol. 21 (124), April, 435-438.

<sup>100</sup> Coale A., How the distribution of human population is determined. *Cold Spring Harbor Symposium on Quantitative Biology*. 1957. Vol. 22.

исходной возрастной структуры на форму каждой последующей ослабевает и постепенно сходит на «нет». Это свойство любого населения с изменяющимися параметрами рождаемости и смертности удаляться от своей возрастной структуры далекого прошлого получило название *слабой эргодичности*. Математически оно было доказано учеником А. Коула А. Лопесом в форме следующей теоремы (теорема Лопеса): если два населения подчиняются одинаковым, но изменяющимся во времени режимам рождаемости и смертности, то эти два населения в конце концов приобретут одинаковые возрастные структуры, хотя эти структуры не обязательно стремятся к пределу, как в случае стабильного населения.

Основные свойства и оценки основных параметров стабильного населения были получены с помощью однородного интегрального уравнения воспроизводства (или уравнения Лотки)<sup>101</sup>:

$$B(t) = \int_{\alpha}^{\beta} B(t-x)l(x)f(x)dx \quad (1)$$

Это уравнение, примененное к женскому населению, описывает траекторию рождений  $B(t)$  в каждый точный момент времени  $t$  при заданных функциях рождаемости  $f(x)$  и смертности  $l(x)$  женского населения.

Заменяя в интегральном уравнении  $B(t)$  на равную величину  $B(0)e^{rt}$ , а  $B(t-x)$  – на величину  $B(0)e^{r(t-x)}$ , а затем сокращая на  $B(0)e^{rt}$ , можно получить характеристическое уравнение стабильного населения с неизвестным коэффициентом естественного прироста  $r$ :

$$\int_0^{\infty} e^{-rx} f(x)l(x)dx = 1$$

Характеристическое уравнение имеет бесконечно много комплексных корней и единственный действительный корень  $r$ , который является истинным коэффициентом естественного прироста стабильного населения или коэффициентом Лотки. Поэтому каждой комбинации возрастных распределений функции дожития  $l(x)$  и функции рождаемости  $f(x)$  соответствует

<sup>101</sup> Современная математическая теория стабильного населения может быть изложена в терминах непрерывных функций или матриц. Руководствуясь содержанием программ по математике для студентов экономических и социологических специальностей Вузов, мы отдали предпочтение первому способу изложения.

единственное стабильное население с присущими ему одному возрастной структурой, общими коэффициентами рождаемости и смертности, а также коэффициентом естественного прироста  $r$ . Таким образом, для каждого реального населения с наблюдаемыми возрастными интенсивностями рождаемости и смертности можно построить один «стабильный эквивалент». Очевидно, что при  $r=0$  стабильное население превращается в стационарное.

Если изучается реальное население, в котором процесс стабилизации начался в некоторый момент времени, то при исчислении  $B(t)$  следует ввести поправку  $G(t)$ , отражающую вклад исходного женского населения в процесс рождаемости. Тогда получается уравнение Лотки в неоднородной форме:

$$B(t) = G(t) + \int_{\alpha}^{\beta} B(t-x)l(x)f(x)dx. \quad (2)$$

При  $t \geq \beta$  функция  $G(t)$  равняется 0, поскольку все женщины, жившие в момент  $t = 0$ , выходят из репродуктивного возраста. Отказываясь от предположения о неизменности функций рождаемости и смертности в уравнениях (1) и (2), можно получить однородное и неоднородное интегральные уравнения, описывающие процесс воспроизводства любого населения.

Население, в котором после длительного периода неизменности возрастных интенсивностей рождаемости и смертности, начинается снижение смертности, называют **квазистабильным**. Возрастная структура в квазистабильном населении также остается неизменной.

Типовые таблицы смертности порождают систему **типовых стабильных населений**: каждая функция  $l(x)$  порождает семейство типовых стабильных населений, различающихся функциями рождаемости и коэффициентом естественного прироста.

## 11.2. ОСНОВНЫЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ В СТАБИЛЬНОМ НАСЕЛЕНИИ

1. Общие коэффициенты рождаемости ( $b$ ) и смертности ( $m$ ) стабильного населения постоянны.

2. Коэффициент естественного прироста ( $r$ ) стабильного населения постоянен.

3. Стабильное население растет по экспоненциальному закону (или в геометрической прогрессии):  $P(t) = P(0) * e^{rt}$ .

4. Числа родившихся ( $B$ ) и умерших ( $D$ ) в стабильном населении изменяются по экспоненциальному закону (или в геометрической прогрессии).  
 $B(t) = B(0) * e^{rt}$ ,  $D(t) = D(0) * e^{rt}$ .

5. Общий (истинный) коэффициент рождаемости ( $b$ ) в стабильном населении равен

$$b = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-rx} l(x) dx}$$

Общий (истинный) коэффициент смертности ( $m$ ) в стабильном населении равен

$$m = b - r = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-rx} l(x) dx} - r$$

6. Доля возрастной группы  $x$  в общей численности стабильного населения определяется по формуле  $c(x) = b * l(x) * e^{-rx}$ .

7. Из определения стабильного населения следует, что в нем интенсивности рождаемости и смертности реального и условного поколений для одних и тех же возрастов совпадают (см. рисунок 11.1).

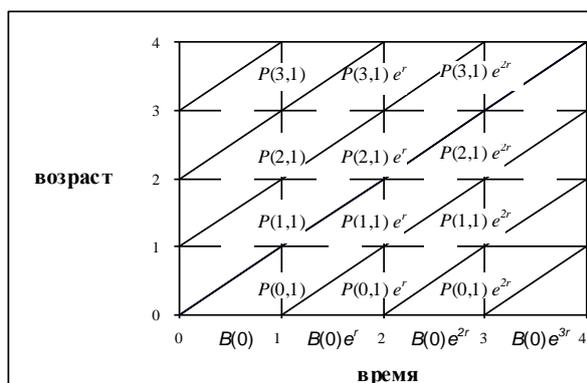


Рис. 11.1. Диаграмма Лексиса для стабильного населения

### 11.3. ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛЬНОГО НАСЕЛЕНИЯ

#### 11.3.1. Вычисление истинного коэффициента естественного прироста

1. На практике достаточно хорошее приближение к действительному корню

уравнения  $\int_0^{\infty} e^{-rx} f(x)l(x)dx = 1$  дает квадратное уравнение

$$\frac{1}{2} \mu r^2 + \lambda r - \ln R_0 = 0, \quad (3)$$

где

$$\lambda = \frac{R_1}{R_0}, \quad \mu = \lambda^2 - \frac{R_2}{R_0} = \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 - \frac{R_2}{R_0}. \quad (4)$$

Функции  $R_0$ ,  $R_1$  и  $R_2$  называют соответственно нулевым, первым и вторым моментами. В терминах возрастных коэффициентов рождаемости и смертности по  $n$ -летним возрастным группам формулы для  $R_0$ ,  $R_1$  и  $R_2$  имеют вид:

$$R_0 = \frac{1}{l_0} \sum_{x=\alpha+\frac{n}{2}}^{\beta-\frac{n}{2}} L_x f_x, \quad R_1 = \frac{1}{l_0} \sum_{x=\alpha+\frac{n}{2}}^{\beta-\frac{n}{2}} x L_x f_x, \quad R_2 = \frac{1}{l_0} \sum_{x=\alpha+\frac{n}{2}}^{\beta-\frac{n}{2}} x^2 L_x f_x. \quad (5)$$

Здесь  $f_x = \delta * F_x$  – возрастной коэффициент рождаемости девочек,  $\delta = 0,488$  – доля девочек при рождении,  $F_x$  – возрастной коэффициент рождаемости детей обоих полов<sup>102</sup>.  $R_0$  представляет собой нетто-коэффициент воспроизводства.

Решая квадратное уравнение (3) относительно  $r$  и подставляя значения (4), получим выражение для действительного корня:

$$r = \frac{\frac{R_1}{R_0} - \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 - 2\left[\frac{R_2}{R_0} - \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2\right] \ln R_0}}{\frac{R_2}{R_0} - \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2}. \quad (6)$$

2. Для оперативных исчислений на основе линейной компоненты уравнения (3)  $\lambda r - \ln R_0 = 0$  можно получить следующие формулы для приближенной оценки  $r$ :

$$r \approx \sqrt{\frac{R_1}{R_0}} - 1, \quad (7)$$

$$r \approx \frac{\ln R_0}{R_1/R_0}, \quad (8)$$

<sup>102</sup>  $R_0$  в формуле (5) представляет собой нетто-коэффициент воспроизводства, который показывает, в какой пропорции материнское поколение замещается дочерним.

Отношение  $A_b=R_1/R_0$  определяет средний возраст матери при рождении ребенка в стабильном населении.

3. Для нахождения истинного коэффициента естественного прироста можно воспользоваться различными численными методами. Для этого надо представить характеристическое уравнение в дискретном виде:

$$1 = \sum_0^{\infty} e^{-r(x+n/2)} \cdot \frac{L_x}{l_0} \cdot m(x)$$

где  $(x + n/2)$  – середина возрастного интервала  $(x, x+n)$ .

**Метод бисекций.** Зададим отрезок  $[r_0, r_1]$ , на котором определен  $r$ . Тогда

$$\text{можно записать: } \phi(r_1) = \sum_0^{\infty} e^{-r_0(x+n/2)} \cdot \frac{L_x}{l_0} \cdot m(x).$$

Второе значение выбирается по следующему правилу:

если  $\phi(r_n) > 1$ , то  $r_{n+1} = r_n + 0,5 * |r_n - r_{n-1}|$ ;

если  $\phi(r_n) < 1$ , то  $r_{n+1} = r_n - 0,5 * |r_n - r_{n-1}|$ .

где  $r_{n-1}, r_n, r_{n+1}$  – последовательные итерации.

Ниже (табл. 11.1.) приведены вычисления истинного коэффициента естественного прироста с использованием данных Госкомстата для женского населения России за 1989 г. Оценка коэффициента Лотки по формуле (7) равна 0,198%.

*Пример 1. Вычисление истинного коэффициента естественного прироста для женского населения России по данным Госкомстата 1989 г.*

Таблица 11.1.

Возрастные группы по возрасту матери	Повозрастной коэффициент рождаемости женщин	Середина Возрастного интервала	Число живущих в возрасте $x$	Нулевой момент (2)*(4)	Первый момент (3)*(5)	Второй момент (3)*(6)
$[x, x+5)$	$f_x = \delta * F_x$	$Y = (x+5)/2$	$L_x / l_0$	$R_0$	$R_1$	$R_2$
1	2	3	4	5	6	7
15-19	0,0256	17,5	4,88781	0,12518	2,1906	38,3350
20-24	0,0800	22,5	4,87109	0,38945	8,7626	197,1589
25-29	0,0503	27,5	4,85338	0,24409	6,7125	184,5927
30-34	0,0266	32,5	4,83212	0,12870	4,1827	135,9387
35-39	0,0107	37,5	4,80210	0,05153	1,9326	72,4707
40-44	0,0024	42,5	4,75675	0,01160	0,4931	20,9558

45-49	0,0001	47,5	4,68704	0,00046	0,0217	1,0317
Итого	0,1958			0,95101	24,29573	650,48355
Итого * 5 =	0,979					

$$\frac{R_1}{R_0} = 25,547;$$

$$\frac{R_2}{R_0} = 683,994;$$

$$\ln R_0 = -0,0502$$

$$15,663 r^2 - 25,547 r - 0,0502 = 0$$

$$r = -0,00196 \text{ или } -0,196 \% \text{ в год}$$

### 11.3.2. Вычисление истинных коэффициентов рождаемости и смертности

Истинные коэффициенты рождаемости и смертности представляют собой коэффициенты, которые будут достигнуты в населении в конце периода стабилизации, т.е. это коэффициенты рождаемости и смертности стабильного населения.

Истинный коэффициент рождаемости можно вычислить по следующей формуле:

$$b = \frac{1}{\sum_0^{\infty} e^{-r(x+n/2)} \cdot \frac{L_x}{l_0}} \quad (9)$$

Истинный коэффициент смертности равен

$$m = b - r = \frac{1}{\sum_0^{\infty} e^{-r(x+n/2)} \cdot \frac{L_x}{l_0}} - r \quad (10)$$

где  $(x + n/2)$  – середина возрастного интервала

*Пример 2. Вычисление истинных коэффициентов рождаемости и смертности для женского населения России по данным Госкомстата 1989 г.*

$$r = -0,00196 \text{ или } -0,196 \% \text{ в год, } l_0 = 100000$$

Таблица 11.2.

Возрастные группы	Середина интервала, лет	${}_5L_x$	$e^{-ry}$	$e^{-ry} {}_5L_x / l_0$
1	2	3	4	5

0-4	2,5	492291	1,005	4,947091
5-9	7,5	487301	1,015	4,945172
10-14	12,5	485707	1,025	4,977538
15-19	17,5	483327	1,035	5,001927
20-24	22,5	478341	1,045	4,999079
25-29	27,5	471250	1,055	4,973474
30-34	32,5	462667	1,066	4,930978
35-39	37,5	452166	1,076	4,86652
40-44	42,5	438596	1,087	4,766959
45-49	47,5	419419	1,098	4,603423
50-54	52,5	392997	1,108	4,355902
55-59	57,5	357992	1,119	4,00699
60-64	62,5	312174	1,130	3,528562
65-69	67,5	257413	1,141	2,938242
70-74	72,5	194801	1,153	2,245455
75-79	77,5	129227	1,164	1,504259
80-84	82,5	71067	1,176	0,835398
85+	90	28679	1,193	0,342116
<b>Всего</b>		<b>6415415</b>		<b>73,76909</b>

$b=1/73,7691=0,01356$  или 13,56‰;

$m=0,01356-(-0,00196)=0,013577$  или 13,57‰.

Примечание: для возрастного интервала 85+ вместо значения  ${}_5L_{85}$  используется  $T_{85}$  Возраст  $x$ , к которому применяется  $e^{-rx}$ , равен не 87,5, а  $85+e_{85}$  лет

Для сравнения возрастной структуры реального населения и его стабильного эквивалента используются показатели нестабильности:

Среднее квадратичное отклонение от возрастной структуры стабильного населения:

$$\Psi_t = \sqrt{\frac{\sum_0^{\omega} [C_r(x) - C_s(x)]^2}{n}},$$

где  $C_r(x)$  – доля лиц в возрасте  $x$  лет в общей численности реального населения;

$C_s(x)$  – доля в возрасте  $x$  лет в общей численности стабильного эквивалента;  $n$  –

число возрастных групп;  $t$  – момент наблюдения реального населения.

Коэффициент нестабильности:

$$k_t = \sum_0^{\omega} \left| \frac{C_r(x)}{C_s(x)} - 1 \right|$$

Индекс нестабильности:

$$I_t = \frac{k_t}{k_{t-1}}$$

## 11.3.3. Вычисление возрастной структуры стабильного населения

Доля возрастной группы в возрасте  $(x, x+n)$  вычисляется по формуле:

$$c(x, x+n) \approx b * e^{-r(x+n/2)} * L(x, x+n)$$

Численность отдельных возрастных групп вычисляется по формуле:

$$P(x, x+n) = B * L(x, x+n) * e^{-r(x+n/2)}$$

В таблице 11.3. приведены вычисления численностей половозрастных групп стабильных эквивалентов женского и мужского населения России в 1989 году. Коэффициент Лотки для мужского населения принимается равным коэффициенту для женского населения. Соотношение полов при рождении, равное 1,05 мальчика на 1 девочку, позволяет при том же коэффициенте естественного прироста и показателях таблиц смертности для мужчин найти также и возрастную структуру стабильного мужского населения. В целях корректности сопоставления возрастных структур различных стабильных населений их численность приводят к величине, кратной 10, например, 10000 или 100000. Последний столбец таблицы 11.3 дает распределение населения, исходя из общей численности в 100000 человек. Он получен с помощью умножения значений в столбцах (6) и (7) на поправочный коэффициент, равный  $100000/(7218695+6877705)$ .

*Пример 3. Вычисление численности половозрастных групп стабильного населения с коэффициентом естественного прироста  $r = -0,196\%$  в год (по данным для России 1989 г.)*

Таблица 11.3.

Возраст. группа от $x$ до $x+4$	Середина интервала $y=x+2,5$ лет	Стационарное население			Стабильное население			
		Мужчины $s_{t_x}$	Женщины $s_{t_x}$	$e^{-ry}$	Мужчины $1,05 \times (3)$ $\times (5)$	Женщины $(4) \times (5)$	Число на 100000	
							Муж	Жен.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
0- 4	2,5	489547	492291	1,0049	516554	494714	3664	3510
5- 9	7,5	487301	487301	1,0148	519258	494532	3684	3508
10-14	12,5	485707	485707	1,0249	522667	497778	3708	3531
15-19	17,5	483327	483327	1,0350	525238	500227	3726	3549
20-24	22,5	478341	478341	1,0452	524949	499952	3724	3547
25-29	27,5	471250	471250	1,0555	522271	497401	3705	3529

30-34	32,5	462667	462667	1,0659	517818	493160	3673	3498
35-39	37,5	452166	452166	1,0764	511059	486723	3625	3453
40-44	42,5	438596	438596	1,0870	500614	476775	3551	3382
45-49	47,5	419419	419419	1,0978	483449	460428	3430	3266
50-54	52,5	392997	392997	1,1086	457463	435679	3245	3091
55-59	57,5	357992	357992	1,1195	420828	400789	2985	2843
60-64	62,5	312174	312174	1,1306	370589	352942	2629	2504
65-69	67,5	257413	257413	1,1418	308597	293902	2189	2085
70-74	72,5	194801	194801	1,1530	235840	224609	1673	1593
75-79	77,5	129227	129227	1,1644	157995	150471	1121	1067
80-84	82,5	71067	71067	1,1759	87745	83567	622	593
85+	87,5	28679	28679	1,1875	35759	34056	254	242
<b>Всего</b>		<b>6412671</b>	<b>6415415</b>		<b>7218695</b>	<b>6877705</b>	<b>51209</b>	<b>48791</b>

Примечание: для возрастного интервала 85+ вместо значения  ${}_5L_{85}$  используется

$T_{85}$  Возраст  $x$ , к которому применяется  $e^{-rx}$ , равен не 87,5, а  $85+e_{85}$  лет

#### 11.4. СООТНОШЕНИЕ ИСТИННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ЕСТЕСТВЕННОГО ПРИРОСТА И НЕТТО-КОЭФФИЦИЕНТА ВОСПРОИЗВОДСТВА

В стабильном населении отношение между нетто-коэффициентом воспроизводства и истинным коэффициентом естественного прироста выражается соотношением  $e^{rT}=R_0$ <sup>103</sup>, в котором величиной  $T$  обозначена длина поколения. В теории стабильного населения нетто-коэффициент  $R_0$  показывает, в какой пропорции материнское поколение замещается дочерним, а длина поколения – период времени, в течение которого это замещение происходит, или численность женского населения возрастает в  $R_0$  раз. Если известны  $r$  и  $R_0$ , то из следующей формулы можно найти  $T$ :

$$T = \frac{\ln R_0}{r} \quad (11)$$

Для приблизительной оценки  $T$  может использоваться формула  $T \approx (A_B + \mu)/2$ , где  $A_B$  – средний возраст матери в стабильном населении,  $\mu$  – средний возраст матери в стационарном населении.

Нетто-коэффициент воспроизводства можно оценить по формулам  $R_0 = R * I(A_M)$  и  $R_0 = \delta * TFR * I(A_M)$ , где  $R$  – брутто-коэффициент воспроизводства,

<sup>103</sup> В дискретном случае это выражение принимает вид  $(1+r)^T = R_0$

$TFR$  – суммарный коэффициент рождаемости,  $\delta$  – доля девочек при рождении,

$$A_m - \text{средний возраст матери при рождении ребенка, } Am = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)m(x)dx}{\int_{\alpha}^{\beta} m(x)dx},$$

$l(A_m)$  – вероятность новорожденного дожить до среднего возраста матери.

Если известны все необходимые параметры, то истинный коэффициент воспроизводства можно представить также в виде

$$r = \frac{\ln Ro}{T} \text{ или } r = \frac{\ln CKP + \ln \delta + \ln(Am)}{T}$$

Приближенная оценка среднего возраста матери в стационарном населении  $T=27$  используется для численного решения характеристического уравнения. В этом случае начальное значение  $r_0$  определяется как

$$r = \frac{\ln Ro}{27}$$

Каждое последующее приближенное значение корня выбирается по формуле  $r_{n+1} = r_n + (\phi(r_n) - 1)/27$ .

### 11.5. ДЕМОГРАФИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ<sup>104</sup>

Под демографическим потенциалом (reproductive value)  $v(x)$  отдельного человека или группы людей в возрасте  $x$  понимается относительный вклад их потомства в общее потомство населения в отдаленном будущем:

$$v(x) = \frac{1}{e^{-rx} \cdot l(x)} \cdot \int_x^{\beta} e^{-ra} \cdot l(a) \cdot f(a) da.$$

В практических расчетах для пятилетних возрастных интервалов используется следующая аппроксимация вышеприведенного выражения

$$v(x) \cong \frac{e^{-2.5r} {}_5L(x)F(x) + e^{-7.5r} {}_5L(x)F(x) + \dots}{l(x)}.$$

<sup>104</sup> Это понятие не следует путать с потенциалом демографического роста (growth potential). О последнем можно прочитать в: Андреев Е.М., Пирожков С.И. О потенциале демографического роста. В кн.: Население и окружающая среда. М., 1975; Буржуа-Пиша Ж., Стабильные, полустабильные населения и потенциал роста. В кн.: Демографические модели. Под ред. Е.М. Андреева и А.Г. Волкова. М., 1977.

Средний демографический потенциал для возрастного интервала от  $x$  до  $x+5$  оценивается по рекуррентной формуле

$$V(x) \cong 2.5F(x) + \frac{e^{-5r} {}_5L(x+5)}{{}_5L(x)} \cdot (2.5F(x+5) + {}_5V(x+5))$$

### 11.6. ИНЕРЦИЯ ДЕМОГРАФИЧЕСКОГО РОСТА

Одной из важных задач демографического анализа является оценка воздействия возрастной структуры на динамику численности населения страны. Для ее решения в современной демографии используется показатель «моментум демографического роста» (или «инерция демографического роста»), введенный в научный оборот американским демографом Натаном Кейфицем<sup>105</sup>. Пусть, начиная с момента времени  $t$ , в некотором населении режим рождаемости устанавливается на уровне, обеспечивающем простое воспроизводство, т.е.  $R_0=1$ , и возрастные характеристики рождаемости и смертности перестают изменяться. По правилу сильной эргодичности, через некоторое время это население достигнет стационарного состояния, т.е. его численность и возрастная структура перестанут изменяться. В период стабилизации численность населения будет изменяться за счет потенциала роста, заключенного в его возрастной структуре к началу процесса стабилизации.

Моментум  $M$  демографического роста равен отношению численности стационарного населения к численности его реального прообраза. Его величина показывает, во сколько раз изменится численность населения за счет исходной возрастной структуры, если его возрастные характеристики рождаемости и смертности станут постоянными, и режим рождаемости будет обеспечивать простое воспроизводство:

$M = \frac{P_s}{P}$ , где  $P$  – численность реального населения;  $P_s$  – численность его стационарного эквивалента.

<sup>105</sup> Keyfitz N. On the momentum of Population Growth. Demography. Vol.8 No 1. 1971.

$P_s = B_s \cdot e_0 = e_0 \cdot \int_0^{\beta} \frac{P(x)}{l(x)} \cdot w(x) dx$ , где  $B_s$  – число рождений в стационарном населении;  $e_0$  – ожидаемая продолжительность предстоящей жизни с рождения.

Функция  $w(x)$  равна  $w(x) = \frac{\int_0^{\beta} l(y) f(y) dy}{A_m}$ , где  $A_m$  – средний возраст матери в стационарном населении.

Иначе моментум демографического роста можно выразить как

$$M = \int \frac{c(x)}{c_s(x)} \cdot w(x) dx.$$

Чтобы оценить моментум демографического роста, во-первых, следует, рассчитать возрастные коэффициенты рождаемости  ${}_n f^*(x)$ , при которых обеспечивается простое воспроизводство, по формуле  ${}_n f^*(x) = \frac{{}_n f(x)}{R_0}$ , где  $R_0$  – нетто-коэффициент воспроизводства, который наблюдался перед переходом рождаемости к уровню, обеспечивающему простое воспроизводство.

Оценка характеристик стационарного населения вычисляется с помощью следующих дискретных приближений:

$$A_m = \sum_{15}^{45} (x + n/2) \cdot {}_n f^*(x) \cdot {}_n L^F(x),$$

$${}_n w(x) = \frac{(0.5 \cdot {}_n L^F(x) + \sum {}_n L^f(x) \cdot {}_n m^*(x))}{A_m},$$

$$B_s^F = \sum_0^{45} \frac{{}_n P^F(x)}{{}_n L^F(x)/n} \cdot {}_n w(x).$$

Численность женщин в стационарном населении рассчитывается по формуле  $P_s^F = B_s^F \cdot e_0^F$ . Численность мужчин определяется через соотношение полов при рождении  $P_s^M = \delta \cdot B_s^F \cdot e_0^M$ . Моментум населения равен

$$M = \frac{P_s^F + P_s^M}{P}.$$

Пример 4. Вычисление инерции демографического роста для населения России, 1989 г.

Таблица 11.4.

Возраст	$P(x,x+5)$ Тыс.	$L(x,x+5)/l_0$	$f(x)$	$f^*(x)=f(x)/R_0$	$\delta f^*(x) L(x,x+5)/l_0$	$A_m$	$w(x)$	Родившиеся
0-4	5906	4,9231					0,03914	234,8
5-9	5595	4,8984					0,03914	223,6
10-14	5223	4,8898					0,03914	209,1
15-19	4852	4,8791	0,053	0,0551	0,1316	2,30	0,03657	181,8
20-24	4801	4,8633	0,164	0,1720	0,4095	9,21	0,02598	128,2
25-29	6187	4,8452	0,103	0,1082	0,2567	7,06	0,01294	82,6
30-34	6394	4,8237	0,055	0,0573	0,1353	4,40	0,00527	34,9
35-39	5866	4,7941	0,022	0,0231	0,0542	2,03	0,00156	9,5
40-44	3889	4,7495	0,005	0,0052	0,0122	0,52	0,00026	1,1
45-49	4210	4,6812	2E-04	0,0002	0,0005	0,02	0,00000	0,0
<b>Всего</b>					1,0000	25,55		1105,5

$$P^F=78308; e_0^F = 74,5$$

$$P^M=68714; e_0^M = 64,2$$

$$\text{Реальный } R_0=0,953; A_m=25,6$$

$$B_S^F = 1105.5$$

$$P_S^F = 1105.5 \cdot 74.5 = 82361$$

$$P_S^M = 1105 \cdot 64.2 \cdot 1.042 = 73833$$

$$M=(82361+73833)/147022=1.06$$

### 11.7. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ СТАБИЛЬНОГО НАСЕЛЕНИЯ

Модель стабильного населения широко используется в аналитических целях. В ее терминах определяются многие демографические индикаторы, в первую очередь система показателей режима воспроизводства. На практике для оценки сложившейся демографической ситуации широко используется метод сравнения параметров реального и стабильного населения. С помощью модели стабильного населения исследуются разнообразные теоретические проблемы, изучение которых на основе наблюдений за реальными данными затруднено. В первую очередь это относится к изучению взаимосвязей между возрастной структурой и процессами смертности и рождаемости. Включение в

модель миграции позволяет узнать, каким образом миграционные процессы влияют на процесс воспроизводства населения.

На основе модели стабильного населения разработаны методы получения, восстановления или коррекции информации в условиях неполных или недостоверных данных.<sup>106</sup> Возможности исследователей здесь были существенно расширены благодаря разработке французским демографом Буржуа-Пиша (1958) уже упоминавшейся выше модели квазистабильного населения. Фактически модель квазистабильного населения описывает ранние стадии демографического перехода.

Модель стабильного населения широко используется для решения самых разнообразных прикладных задач. Она применяется в актуарных расчетах. С ее помощью изучаются взаимосвязи между демографическим и экономическим ростом, воздействие демографических процессов на пенсионную сферу, экономико-демографические процессы в реальных поколениях, влияние возрастной структуры на социальную мобильность и др.

### **ЗАДАЧИ**<sup>107</sup>

#### *Задача 1*

Докажите, что в стабильном населении общие коэффициенты рождаемости и смертности неизменны.

#### *Задача 2*

Докажите, что в стабильном населении числа родившихся и умерших изменяются по экспоненциальному закону.

---

<sup>106</sup> См., например, Организация Объединенных наций, Руководства по методике демографических исследований. Руководство 4. Методы исчисления основных демографических показателей по неполным данным. Нью-Йорк, 1974; United Nations, Manual 10. Indirect techniques for demographic estimation. New York: United Nations, 1983

<sup>107</sup> Хотелось подчеркнуть значимость работ Н. Кейфица для тех, кто хочет овладеть теорией стабильного населения и математической демографией. На его задачах и примерах выросли многие поколения демографов, в том числе авторы этой работы. Многие из предлагаемых здесь задач, ставшие классическими для демографического образования, в той или иной форме придуманы Кейфицем.

**Задача 3\***

Выведите интегральное уравнение воспроизводства в однородной форме.

**Задача 4\***

Докажите, что доля возрастной группы  $x$  в общей численности стабильного населения определяется по формуле  $c(x) = b * l(x) * e^{-rx}$ .

**Задача 5**

Докажите, что  $b = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-rx} l(x) dx}$ .

**Задача 6**

Найдите истинный коэффициент естественного прироста всеми известными вам методами. Сравните полученные результаты с данными

*Примера 1.*

**Задача 7**

Известны следующие характеристики населения Европейской части СССР в 1926 году:

Возраст	Численность (тыс.)		L(x)		Возрастные коэффициенты рождаемости (%)
	мужчины	женщины	мужчины	женщины	
0-4	6991	6934	377672	392629	
5-9	4599	4654	341196	357312	
10-14	5414	5458	333904	350251	
15-19	5141	5722	328663	344863	45,1
20-24	4164	4517	320444	337208	235,4
25-29	3232	4026	310650	327925	255,8
30-34	2481	2877	300761	318205	270,5
35-39	2331	2795	289748	307834	240,1
40-44	2043	2258	276632	296847	155,3
45-49	1775	1994	260156	284912	64,1
50-54	1431	1752	239656	272556	
55-59	1199	1578	214659	254490	

60-64	1032	1361	186636	232223	
65-69	743	972	152891	201355	
70-74	442	654	113901	161021	
75-79	232	320	75154	114847	
80-84	122	193	42297	72071	
85+	86	127	27175	53086	
Всего	43457	48193			

Общий коэффициент рождаемости=44,0 ‰

Общий коэффициент смертности=20,3 ‰

Коэффициент естественного прироста=23,7 ‰

$$e_{85+}^M = 4.86$$

$$e_{85+}^F = 5.20$$

- 1) Рассчитайте истинный коэффициент естественного прироста;
- 2) Исчислите истинные коэффициенты рождаемости и смертности;
- 3) Постройте стабильную возрастную структуру
- 4) Сравните стабильную возрастную структуру с реальной и рассчитайте показатели нестабильности;
- 5) Сравните истинные коэффициенты естественного прироста, рождаемости и смертности с реальными показателями
- 6) Сделайте выводы.

#### Задача 8

Известны следующие характеристики населения Российской Федерации в 2000 году:

Возраст	Численность (тыс.)		L(x)		Возрастные коэффициенты рождаемости (‰)
	мужчины	женщины	мужчины	женщины	
0- 4	3289	3121	490565	492784	
5- 9	4239	4025	488446	491178	
10-14	6083	5848	486993	490389	
15-19	5970	5800	483694	489060	28,1
20-24	5422	5317	474895	486618	95,3
25-29	5239	4972	461852	483641	68,7
30-34	4804	4690	447388	479933	36,0
35-39	5905	5975	430005	475171	12,0
40-44	6121	6396	407254	468543	2,4
45-49	5397	5885	377571	458951	0,1
50-54	3893	4472	339713	444942	
55-59	2523	3264	294248	425800	

60-64	3621	5093	242200	397447	
65-69	2317	3757	186450	355778	
70-74	2034	4088	131427	298057	
75-79	744	2326	82611	225228	
80-84	335	1209	44838	145508	
85+	266	1121	30130	110806	
Всего	68201	77358			

Общий коэффициент рождаемости=8,7 ‰

Общий коэффициент смертности=15,4 ‰

Коэффициент естественного прироста=-6,7 ‰

$$e_{85+}^M = 4.96$$

$$e_{85+}^F = 5.17$$

- 1) Рассчитайте истинный коэффициент естественного прироста;
- 2) Исчислите истинные коэффициенты рождаемости и смертности;
- 3) Постройте стабильную возрастную структуру
- 4) Сравните стабильную возрастную структуру с реальной и рассчитайте показатели нестабильности;
- 5) Сравните истинные коэффициенты естественного прироста, рождаемости и смертности с реальными показателями
- 6) Сделайте выводы.

#### Задача 9

Сравните результаты, полученные в задачах 7 и 8, а также в разобранных примерах для 1989 года. Объясните причины обнаруженных различий.

#### Задача 10\*

Пусть в некоторой популяции все женщины рожают ребенка в точном возрасте 17 лет и пять из каждых шести женщин рожают второго ребенка в возрасте 34 года. Если  $l_{17}$  равно 0,90 и  $l_{34}$  равно 0,84, то чему равно  $r$ ?

#### Задача 11\*

Э. Коул анализировал возрастную-половую структуру стабильного населения при отсутствии смертности.

1) Докажите, что если смертность равна 0, то доля лиц в возрастах старше  $x$  лет равна  $e^{-rx}$ .

2) Найдите долю лиц в возрасте старше 65 лет при условии, что  $r=0,04$ . Дайте интерпретацию полученным результатам.

#### *Задача 12*

В некоторой стране, население которой можно считать стабильным, была проведена перепись населения. Пусть доля лиц в возрасте  $x$  равна  $s_x$ , а доля лиц в возрасте  $y > x$  равна  $s_y$ . Выразите коэффициент естественного прироста в терминах  $s_x$  и  $s_y$ , а также функции дожития  $l(x)$ . Получите ответ как для однолетних, так и для пятилетних возрастных интервалов.

#### *Задача 13*

Согласно данным переписи 1897 года в возрасте 25-29 лет насчитывалось 3679 тыс. женщин, в возрасте 50-54 года – 1931 тыс. Числа живущих даны в таблицах смертности Приложения 1. Оцените коэффициент естественного прироста. Выберите наилучший.

#### *Задача 14\**

В некотором стабильном населении  $s(20)=0,002$ ,  $s(40)=0,0015$ ,  $l(20,20)=0,98$ . Найдите  $r$ .

#### *Задача 15*

С помощью половозрастных пирамид покажите различия в половозрастных структурах населения трех стран, в которых:

1) наблюдается одинаковый режим смертности и различные темпы естественного прироста: в первой стране – 2%, во второй – 0, в третьей – 1%;

2) наблюдаются одинаковые темпы прироста населения и разные уровни ожидаемой продолжительности жизни с рождения: в первой стране – 50 лет, во второй – 65 лет, в третьей – 80 лет.

#### *Задача 16\**

В некотором населении отношение численности мужского населения в возрастах 35-39 лет к численности группы 60-64 года равнялось 2,318, и соответствующее отношение чисел живущих в таблицах смертности ( ${}_5L_x$ ) – 1,249. С какой скоростью растет численность этого населения?

### Задача 17

Пусть из переписи населения известна возрастная структура населения, которое в целом удовлетворяет условиям стабильного населения. Известен также коэффициент прироста этого населения.

- 1) найдите его таблицу смертности;
  - 2) решите эту задачу применительно к российским данным за 1897 год.
- Коэффициент естественного прироста женского населения составлял 18‰.

Возраст	Возрастная структура женского населения(%)
0- 4	14,7
5- 9	11,6
10-14	10,9
15-19	9,9
20-24	8,5
25-29	7,7
30-34	6,5
35-39	6,0
40-44	5,4
45-49	4,3
50-54	4,0
55-59	2,9
60-64	3,0
65-69	1,7
70-74	1,5
75-79	0,6
80+	0,7

- 1) сравните полученную таблицу смертности с данными Приложения 1 и оцените масштаб расхождений между ними.

### Задача 18

Пусть даны таблица смертности и общий коэффициент смертности населения, которое можно считать стабильным. Как оценить коэффициент

естественного прироста этого населения? Зная, что общий коэффициент смертности в России в 1897 году составлял 25%, и используя таблицу смертности женского населения (см. Приложение 1), оцените коэффициент естественного прироста. Постройте стабильную возрастную структуру и сравните ее со структурой реального населения (см. *Задачу 17*).

#### *Задача 19*

Дана таблица смертности для женского населения Непала:

Возраст (x лет)	Число доживающих до точного возраста x ( $l_x$ )
0	100 000
1	96013
5	93744
10	93442
20	92856
30	91474
40	89154
50	84394
60	75400
70	58386
80	24353

1) Рассчитайте долю каждой возрастной группы в общей численности населения, предполагая, что данное население стационарное;

2) Рассчитайте долю отдельных возрастных групп при условии, что население растет экспоненциально с темпом прироста 2% в год;

3) Сравните полученные результаты.

#### *Задача 20*

Как Вы думаете почему, в стабильном населении, численность которого сокращается, людей от 40 до 60 лет обычно больше, чем тех, кто моложе или старше их?

#### *Задача 21*

Используя показатели таблиц смертности женского населения России в 2000 году (Приложение 1):

1) постройте стационарное население и оцените доли отдельных возрастных групп в общей численности населения;

2) оцените доли отдельных возрастных групп в общей численности населения, предполагая, что население является стабильным и увеличивается

(1) на 1%,

(2) на 2% в год,

(3) сокращается на 1% в год.

3) сравните полученные результаты.

### *Задача 22*

Пусть дано стабильное население с положительным коэффициентом Лотки. Для каждого из нижеприведенных случаев нарисуйте половозрастные пирамиды и сделайте краткие комментарии, которые проиллюстрируют, как будет выглядеть возрастная структура через 25 лет после указанных изменений.

1) из-за улучшения диагностики и лечения сердечно-сосудистых заболеваний резко снизилась смертность у мужчин и женщин в возрастах от 45 лет и старше;

2) постепенно в течение 20-летнего периода на 50% снижается уровень рождаемости. Новый уровень рождаемости в дальнейшем не меняется;

3) в течение одного года резко уменьшилось число рожденных детей, затем уровень рождаемости восстановился и остался неизменным;

4) в течение пяти лет заметно снизилась младенческая смертность, уровень которой затем перестал изменяться.

### *Задача 23*

В стабильном населении число людей в возрасте от 40 до 40½ лет равно числу людей в возрасте от 40½ до 41 года. В терминах функции  $l_x$  получите выражение для вычисления коэффициента естественного прироста.

Указание: преобразуйте формулу для оценки доли возрастной группы в общей численности стабильного населения  $s(x)$  в формулу численности возрастной группы  $P(x)$ .

*Задача 24*

Предложите алгоритм построения таблиц смертности по результатам двух переписей, предполагая, что исследуемое население удовлетворяет условиям стабильности. Данные переписи сгруппированы по пятилетним группам. Интервал между проведением переписей кратен пяти, но не превосходит 15 лет.

Указание: Выразите отношение между последующими возрастными группами, относящимися к разным переписям, в терминах функции  $L(x)$ . Далее следует обратиться к модельным таблицам.

*Задача 25*

Как зависит средний возраст матери от коэффициента естественного прироста в стабильном населении?

*Задача 26*

Объясните, почему длина поколения меньше среднего возраста матери при рождении ребенка в растущем населении, и больше – в уменьшающемся населении.

*Задача 27*

В некоторой стране население удовлетворяет условиям стабильности. Оно увеличивается с темпом прироста 2% в год, а ожидаемая продолжительность жизни с рождения для обоих полов составляет 65 лет. В исследуемом году в этом населении родилось 1000 детей. Рассчитайте:

- 1) Общую численность населения страны;
- 2) Общую величину пособий, которые в течение года выплачиваются родственникам умерших по следующей схеме: в возрасте до 10 лет – 500\$, и 1000\$ – в случае смерти тех, кому больше 10 лет.
- 3) Согласно пенсионному законодательству, каждый человек, достигший 65 лет, получает пенсию в размере 1000\$. Какова общая величина пенсионных выплат?

4) Границами школьного возраста являются возраста 5 и 15 лет. Сколько в стране школьников?

5) Какими будут ответы на предыдущие вопросы, если коэффициент естественного прироста будет отрицательным, равным  $-0,5\%$  в год?

6) Сравните полученные результаты.

#### *Задача 28*

В стране, рассмотренной в *Задаче 29*, существует 2 партии. Избирательный ценз – 20 лет. 60% людей в возрасте старше 45 лет голосуют за партию А, 40% тех, кому меньше 40 лет, голосуют за партию Б. Кто победит на выборах при темпах прироста населения в 2% и  $-0,5\%$ ?

#### *Задача 29*

В некоторой стране продолжительность жизни женского населения составляет 75 лет. Допуская, что население является стабильным с коэффициентом естественного прироста, равным 2,5 промилле в год, и используя модельные таблицы смертности системы «General» (см. Приложение 1), оцените:

- 1) общий коэффициент рождаемости;
- 2) долю лиц в школьных возрастах (от 5 до 15 лет);
- 3) долю лиц в трудоспособных возрастах (от 15 до 60 лет);
- 4) долю лиц в пенсионных возрастах (от 60 лет и старше).

#### *Задача 30\**

Предположим, что в некотором стабильном населении каждый человек в возрасте от 15 до 60 лет будет расходовать 1 доллар для уплаты пенсии в размере  $X$  долларов каждому человеку в возрасте старше 60 лет.

- 1) Оцените размер пенсии  $X$ ;
- 2) Как зависит размер пенсий  $X$  от коэффициента естественного прироста  $r$ ?
- 3) Как изменится выплачиваемая сумма, если граница пенсионного возраста увеличится до 65 лет.

*Задача 31\**

Две страны имеют одинаковый режим смертности. В первой стране население увеличивается на 2% в год, во второй – остается стационарным. Как различаются демографические нагрузки в двух странах, если границы трудоспособного возраста определить интервалом:

1) от 15 до 60 лет;

2) от 20 до 65 лет?

Найдите соотношение, показывающее, как влияет изменения в коэффициенте естественного прироста на долю возрастной группы  $x$  в общей численности населения.

Указание: используйте подход, примененный в *Задаче 30*.

*Задача 32*

Предположим, что суммарный коэффициент рождаемости в России увеличился на 0,5. При этом средний возраст матери и возрастные интенсивности смертности практически не изменились. Как изменится в этом случае величина истинного коэффициента воспроизводства? Решите задачу для случая, если суммарный коэффициент рождаемости уменьшится на 0,2.

*Задача 33\**

В примитивной общине мужчины вступают в брак в возрасте 40 лет, а женщины – в возрасте 20 лет. Как быстро должна увеличиваться численность населения общины, чтобы у каждого мужчины было две жены? Предполагается, что население общины стабильное, естественный прирост одинаков у мужского и женского населения.

*Задача 34*

Рассматриваются две пенсионные схемы: накопительная и распределительная. Возраст выхода на пенсию равен 65 годам. Предполагая, что изучаемое население является стабильным, рассчитайте величину взноса, который каждый занятый в возрасте от 20 до 65 лет должен делать при

распределительной схеме, чтобы поддержать пожилое население с размером пенсии 1 доллар в год. Покажите, что это эквивалентно накопительной пенсионной схеме в случае, если ставка процента равна коэффициенту естественного прироста.

Указание: при распределительной пенсионной схеме размер пенсии задается отношением численностей лиц в пенсионных и трудоспособных возрастах:

$$P = \frac{\int_{65}^{\omega} e^{-rx} l(x) dx}{\int_{20}^{\omega} e^{-rx} l(x) dx}$$

При накопительной схеме со ставкой процента, равной  $\delta$ , размер пенсии задается отношением:

$$P = \frac{\int_{65}^{\omega} e^{-\delta x} l(x) dx}{\int_{20}^{\omega} e^{-\delta x} l(x) dx}$$

Соответственно, если  $r = \delta$ , то размеры пенсий в этих схемах одинаковы.

### Задача 35\*<sup>108</sup>

В университете имеется постоянно обновляемый парк компьютеров. Вероятность поломки компьютера равна  $\lambda$  и не зависит от его возраста. Политика университета в области компьютеризации заключается в том, чтобы продавать студентам со скидкой все компьютеры, которые находятся в рабочем состоянии после 5 лет эксплуатации.

1) Определите количество компьютеров, которые надо покупать для того, чтобы размер компьютерного парка не изменялся.

2) В университете решили обновить программное обеспечение. Это можно сделать только на тех компьютерах, которым меньше трех лет. Какая доля компьютеров не будет обновлена?

<sup>108</sup> Hinde A. Demographic Methods. – N.-Y.: Arnold, 1998

*Задача 36\**

На некоторой среднего размера фирме дела развиваются успешно. Поэтому каждые десять лет численность ее работников увеличивается в два раза. Предполагается сохранить подобную стратегию роста численности кадров в будущем. Кадровая политика фирмы заключается в том, что ее штат формируется из выпускников университетов в возрасте 21 год. На пенсию сотрудники выходят по достижении ими 61 года. При этом часть сотрудников увольняется, а некоторые умирают. Из проведенного обследования известно, что из каждых 100 вновь набранных сотрудников 80 остаются работать после 10 лет, 60 – после 20 лет, 40 – после 30 лет, 20 – после 40 лет. Определите:

- 1) С какой скоростью растет численность сотрудников фирмы?
- 2) Какова возрастная структура сотрудников фирмы?

*Задача 37\*<sup>109</sup>*

В одном университете степень бакалавра в области математики присуждают после четырех лет обучения. В конце каждого учебного года студенты сдают экзамены. Тех из них, кто не сдал экзамен в течение первых трех лет, отчисляют из университета. На каждом году обучения не сдают экзамен примерно 10 % студентов. Определите:

- 1) На сколько человек должен увеличиваться прием студентов на первый курс, чтобы число выпускников удваивалось каждые двадцать лет?
- 2) Предположим, что руководство университета решило заморозить общее число студентов на один год. Насколько должен возрасти уровень отчисления, чтобы число студентов на математическом факультете университета не изменилось?

*Задача 38\**

В некотором населении, которое удовлетворяет условиям стабильности, в течение года было зафиксировано  $V$  рождений девочек. Сколько детей родят эти девочки к концу своего репродуктивного периода?

---

<sup>109</sup> Hinde A. Demographic Methods. – N.-Y.: Arnold, 1998

*Задача 39\**

Известно, что при заданном режиме смертности молодое население имеет низкий общий коэффициент смертности по сравнению со старым. Но это утверждение справедливо до определенной степени. Если коэффициент прироста становится очень высоким, то общий коэффициент смертности начинает увеличиваться. Объясните, почему это происходит? Для заданной таблицы смертности, при каком общем коэффициенте рождаемости общий коэффициент смертности будет минимальным?

*Задача 40*

По данным, приведенным в *Задачах 7 и 8*, а также в разобранных примерах, рассчитайте репродуктивный потенциал населения России за 1926, 1989 и 2000 год. Дайте интерпретацию полученным результатам.

*Задача 41*

По данным, приведенным в *Задачах 7 и 8*, а также в разобранных примерах, рассчитайте моментум демографического роста населения России за 1926, 1989 и 2000 гг. Дайте интерпретацию полученным результатам.

*Задача 42<sup>110</sup>*

В следующей таблице приведены оценки численности населения Китая по итогам переписи 1964 года и показатели таблицы смертности 1964 года, где корень таблицы равен 1.

возраст	Численность возрастных групп $P(x, x+n)$	Числа живущих в интервале $L(x, x+n)$
0	342	18.57
20	189	17.72
40	117	15.53
60+	43	8.33

В 1964 году в Китае родилось 27 миллионов детей, а нетто-коэффициент воспроизводства был равен 1,7.

<sup>110</sup> Принстонский университет

Ответьте на следующие вопросы:

1) Предположим, что демографическую политику «один ребенок в семье» китайское правительство начало проводить сразу после 1964 года. В результате уже на следующий год коэффициент воспроизводства был равен 1. Оцените численность населения Китая в 2064 году.

2) Предположим, что в Китае действует распределительная пенсионная система, согласно которой каждый работник в возрасте от 20 до 59 лет отчисляет 100 юаней в год в фонд, из которого выплачиваются пенсии лицам старше 60 лет.

Сколько будет получать пенсионер в 1964 году? Сколько он будет получать в 2064 году при условии, что ежегодный взнос работников (100 юаней) не изменился.

3) Когда пенсионеры будут получать наименьшую пенсию: в 1964 году, в 2064 году или в некоторый промежуточный год? Поясните Ваш ответ, используя половозрастную пирамиду.

### **РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ**

#### *Решение Задачи 3*

Число родившихся девочек в момент  $t$  равно  $B(t) = \int_{15}^{49} P(x, t) \cdot f(x, t) dx$

Численность женщин в возрасте  $x$  в момент  $t$  равна  $P(x, t) = B(x-t) \cdot l(x)$ .

Заменяя  $P(x, t)$  под интегралом полученным выражением получим интегральное уравнение воспроизводства.

#### *Решение Задачи 4*

Доля возрастной группы в точном возрасте  $x$  (или в возрасте от  $x$  до  $x+\Delta$ , где  $\Delta$  – бесконечно малая величина) в общей численности населения определяется по формуле  $c(x) = \frac{P(x, t)}{P(t)}$ , где  $P(x, t)$  – численность людей в возрасте  $x$  в момент  $t$ . Функция  $P(x, t)$  представляет собой произведение числа родившихся  $x$  лет назад и вероятности их дожития до возраста  $x$ , т.е.

$P(x, t) = B(t - x) * l(x)$ <sup>111</sup>. Число родившихся  $x$  лет назад равно произведению общего коэффициента рождаемости на общую численность населения в момент  $t-x$ :  $B(t - x) = b * P(t - x)$ . Из соотношения  $P(t) = P(0) * e^{rt}$  легко получить, что  $P(t - x) = P(t) * e^{-rx}$ . После всех необходимых подстановок получаем  $P(x, t) = b * P(t) * l(x) * e^{-rx}$ . Разделив обе части на  $P(t)$ , мы в итоге получаем математическое выражение возрастной структуры в стабильном населении

Ответ Задачи 10: 0,01979

Ответ Задачи 11: 2)  $c(65+) = 0,074$

Ответ Задачи 14: 0,0134

Воспользуйтесь следующей формулой для оценки возрастной структуры стабильного населения  $c(x) = b * l(x) * e^{-rx}$

Ответ Задачи 16: 0,0247

Решение Задачи 30

$$1) X = \frac{\int_{15}^{60} e^{-rx} l(x) dx}{\int_{60}^{\infty} e^{-rx} l(x) dx} = \frac{T_{St}(15) - T_{St}(60)}{T_{St}(60)}$$

2) надо продифференцировать выражение в 1) по  $r$ . В итоге после простых преобразований получаем

$$\frac{dX}{dr} = \frac{\int_{60}^{\infty} x \cdot e^{-rx} \cdot l(x) dx}{\int_{60}^{\infty} e^{-rx} \cdot l(x) dx} \cdot X - \frac{\int_{15}^{60} x \cdot e^{-rx} l(x) dx}{\int_{15}^{60} e^{-rx} \cdot l(x) dx} \cdot X = [A(60+) - A(15,60)] \cdot X,$$

<sup>111</sup> Здесь  $l(x)$  – вероятность дожития до возраста  $x$  лет по таблице смертности с корнем, равным 1

где функции  $A$  – средний возраст населения в интервалах от 15 до 60 лет и от 60 лет и старше. Как известно, чем выше  $r$ , тем моложе население. Следовательно, при низких или отрицательных величинах  $r$  размер пенсионных выплат будет меньшим.

#### Решение Задачи 31

Демографическую нагрузку  $DB$  можно записать как

$$DB = \frac{\int_{a2}^{\omega} e^{-rx} l(x) dx}{\int_{a1} e^{-rx} l(x) dx}, \text{ где } a1 \text{ и } a2 \text{ – верхняя и нижняя границы}$$

трудоспособного возраста.

Логарифмируя данное выражение и затем дифференцируя, получаем

$$\frac{d \ln DB}{dr} = A(a1, a2) - A(a2+)$$

Значения в правой части выражения соответственно обозначают средний возраст населения в интервале  $(a1, a2)$  и  $(a2, \omega)$ .

Приближенно можно записать

$$\frac{\Delta DB}{DB} = [A(a1, a2) - A(a2+)] \cdot \Delta r$$

#### Решение Задачи 33

Пусть  $(1-\delta)$  – доля мальчиков в общем числе родившихся  $V$ . Численность мужчин в возрасте 40 лет можно записать как  $V \cdot (1-\delta) \cdot l^M(40) \cdot e^{-40r}$ , численность девушек в возрасте 20 лет -  $V \cdot \delta \cdot l^F(20) \cdot e^{-20r}$ . Для решения задачи запишем

$V \cdot (1-\delta) \cdot l^M(40) \cdot e^{-40r} = 2 \cdot V \cdot \delta \cdot l^F(20) \cdot e^{-20r}$ . Откуда следует

$$e^{20r} = \frac{2 \cdot (1-\delta) \cdot l^M(40)}{\delta \cdot l^F(20)} \text{ и далее } r = \frac{1}{20} \cdot \ln \frac{2 \cdot (1-\delta) \cdot l^M(40)}{\delta \cdot l^F(20)}$$

#### Решение Задачи 35

1) Поскольку количество компьютеров в университете не изменяется и коэффициент их выбытия постоянен, то можно считать, что процесс их обновления удовлетворяет условиям стационарного населения.

Пусть  $I(0)$  – число компьютеров, которые ежегодно поступают в университет. Тогда доля тех компьютеров, которые «доживают» до точного возраста  $x$  ( $0 < x \leq 5$ ) равна

$$I(x)/I(0) = \exp\left[-\int_0^x \lambda du\right] = e^{-\lambda x}$$

Численность стационарного населения равна  $P = \int_0^x I(x) dx$ . Подставляя в эту формулу найденное ранее выражение  $I(x) = I(0) e^{-\lambda x}$ , получим  $P = \int_0^5 I(0) e^{-\lambda x} dx = I(0) [e^{-5\lambda} / -\lambda - 1 / -\lambda]$ , откуда следует, что  $P = I(0) [(1 - e^{-5\lambda}) / \lambda]$ . Таким образом, можно получить оценку количества ежегодно приобретаемых компьютеров  $I(0) = P \lambda / (1 - e^{-5\lambda})$ .

2) Количество компьютеров в возрасте 3 до 5 лет в условиях стационарности задается выражением  $L(3,5) = \int_3^5 I(0) e^{-\lambda x} dx = I(0) [(e^{-3\lambda} - e^{-5\lambda}) / \lambda]$ .

Отсюда легко найти долю компьютеров, программное обеспечение которых не обновляется:  $L(3,5)/P = (e^{-3\lambda} - e^{-5\lambda}) / (1 - e^{-5\lambda})$ .

#### Решение Задачи 36

1)  $r = \ln 2 / 10 = 0,0693$ ;

2) Указание: для определения возрастного состава на основе данных обследования надо определить значения функции  $L(x)$  и далее воспользоваться формулой для оценки возрастной структуры стабильного населения. *Ответ:* от 21 до 31 года – 63,7 %, от 31 до 41 года – 24,8%, от 41 до 51 года – 8,9%, от 51 до 61 года – 2,6%.

#### Ответы Задачи 37

1)  $r = \ln 2 / 20 = 0.0346$

2) Пусть  $P(1)$  – численность студентов на первом курсе за год до проведения политики замораживания численности студентов. Тогда общая численность студентов факультета равна  $P=P(1)+0.9P(1)e^{-r}+(0.9)^2P(1)e^{-2r}+(0.9)^3P(1)e^{-3r}$ .

В период «замораживания» общая численность студентов будет равна

$$P_f=P(1)e^r+P(1)(1-y)+0.9P(1)(1-y)e^{-r}+(0.9)^2P(1)(1-y)e^{-2r},$$

где  $y$  – величина, на которую должен возрасти уровень выбытия из университета.

Приравняв оба выражения и подставляя найденное ранее значение  $r$ , можно найти значение  $y=0.144$

#### *Решение Задачи 38*

Вероятность дожить новорожденной до возраста  $x$  равно  $l_x$ , вероятность родить ребенка в возрасте от  $x$  до  $x+\Delta$  лет равна  $f(x)$ . Тогда ожидаемое число детей у одной девочки равно

$$\int_0^w l(x)f(x)dx$$

Эта величина известна как нетто коэффициент воспроизводства  $R_0$ . Общее число рождений равно  $B \cdot R_0$ .

#### *Решение Задачи 39*

Общий коэффициент смертности равен  $m=b-r$  или в стабильном населении

$$m = b - r = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-rx} l(x) dx} - r$$

Дифференцируя по  $r$  и приравнявая производную нулю, можно получить  $b \cdot A_m - 1 = 0$ .

Следовательно,  $b=1/A_m$ , т.е. общий коэффициент рождаемости обратнопропорционален среднему возрасту матери при рождении ребенка в стабильном населении.

**Таблица 11.5.** Расчет коэффициентов рождаемости и смертности по зарегистрированным значениям возрастного состава и коэффициента прироста населения методом анализа стабильного населения. Англия и Уэльс, женское население, 1871 г.

Возраст, $x$	$C(x)$ (Доля населения в возрасте до $x$ лет)	Величины $C(x)$ и различные параметры групп женского стабильного населения с $r = 0,0131$		Величины различных параметров групп женского стабильного населения, характеризуемых $C(x)$ , указанными в столбце 2, и $r = 0,0131$				
		Уровень 9	Уровень 11	Коэффициент рождаемости и $b$	Коэффициент смертности $m$	Уровень смертности	Ожидаемая продолжительность жизни $e_0$	Брутто-коэффициент воспроизводства (GRR) ( $\bar{m} = 32,1$ )
(1)	(2)	(3.a)	(3.b)	(4.a)	(4.b)	(4.c)	(4.d)	(4.e)
5	0,132	0,139	0,131	0,0334	0,0202	10,8	44,4	2,37
10	0,248	0,256	0,245	0,0339	0,0208	10,5	43,6	2,41
15	0,351	0,363	0,349	0,0334	0,0203	10,7	44,3	2,38
20	0,445	0,461	0,444	0,0331	0,0200	10,9	44,7	2,35
25	0,536	0,548	0,530	0,3341	0,0210	10,3	43,3	2,42
30	0,616	0,626	0,607	0,3346	0,0215	10,1	42,6	2,46
35	0,686	0,695	0,677	0,3347	0,0216	10,0	42,5	2,46
40	0,746	0,756	0,739	0,3344	0,0213	10,2	42,9	2,44
45	0,801	0,810	0,794	0,3345	0,0214	10,1	42,8	2,45
Коэффициент рождаемости		0,0365	0,0329					
Коэффициент смертности		0,0234	0,0198					
Ожидаемая продолжительность жизни $e_0$		40,0	45,0					
GRR ( $\bar{m} = 31$ )		2,52	2,28					
GRR ( $\bar{m} = 33$ )		2,65	2,39					
GRR ( $\bar{m} = 32,1$ )		2,59	2,34					

## РАЗДЕЛ 12. ВОСПРОИЗВОДСТВО НАСЕЛЕНИЯ

### 12.1. ПРОСТЫЕ МЕРЫ ВОСПРОИЗВОДСТВА

Определение воспроизводства населения как процесса замещения поколений предполагает, что его измерителями должны быть некоторые специальные «поколенные» показатели. Однако самыми распространенными количественными характеристиками воспроизводства в силу своей простоты и доступности статистической информации являются естественный прирост или коэффициент естественного прироста, а также и индекс жизненности.

В отличие от естественного прироста, **индекс жизненности**  $I_v$  представляет собой отношение числа родившихся  $N$  к числу умерших  $M$ , умноженное для легкости интерпретации на сто:

$$I_v = \frac{N}{M} \cdot 100.$$

И показатели естественного прироста, и индекс жизненности измеряют скорость «естественного движения» населения и являются общими характеристиками замещения поколений. Если на протяжении некоторого временного промежутка число рождений превышает число смертей, то можно предположить, что старшие поколения заменяются более многочисленными поколениями детей и внуков. В противоположном случае, старшие поколения, вероятно, количественно не воспроизводят себя.

### 12.2. ИСТИННЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ЕСТЕСТВЕННОГО ПРИРОСТА

В качестве количественной характеристики естественного движения населения также используется истинный коэффициент естественного прироста населения  $r$ , который определяется в рамках модели стабильного населения (см. Раздел 11). Его преимущество по сравнению с наблюдаемыми коэффициентами естественного прироста состоит в том, что в отличие от них он свободен от влияния возрастной структуры

На основе истинного коэффициента можно выделить следующих три режима воспроизводства населения. Если  $r > 0$ , то это означает, что при сохранении заданных возрастных интенсивностей рождаемости и смертности численность населения страны имеет тенденцию к увеличению, т.е. в данном

случае речь идет о *расширенном воспроизводстве*. Если  $r=0$ , то мы имеем дело с населением, в котором родительские поколения замещаются равными им по численности детскими поколениями. Численность такого населения при сохранении зафиксированных режимов рождаемости и смертности в перспективе изменяться не будет. Данный режим воспроизводства называется *простым*. Если режимы рождаемости и смертности задают стабильное население, численность которого сокращается, т.е.  $r<0$ , то такой тип воспроизводства называют *суженным*.

Приближенное значение истинного коэффициента естественного прироста рассчитывалось по формуле  $r = \frac{\ln R_0}{MAF}$ , где знаменатель определялся значением среднего возраста матери при рождении детей. Формула для вычисления числителя  $R_0$  приведена в разделе 11.

### 12.3. ПОКАЗАТЕЛИ ЗАМЕЩЕНИЯ ПОКОЛЕНИЙ

Наиболее адекватными количественными характеристиками естественного движения населения являются показатели, которые непосредственно отражают процесс смены поколений и не зависят от возрастной структуры населения. Наиболее очевидным способом измерить скорость замещения поколений представляется прямое сопоставление численности поколений матерей и их дочерей, отцов и сыновей, родителей и их детей в возрасте, который примерно равен среднему возрасту родителей (отца, матери) при рождении детей. На практике коэффициенты воспроизводства населения гораздо чаще рассчитываются не для реальных, а для гипотетических (условных) поколений. Для их расчета достаточно собрать данные о фактически наблюдавшихся повозрастных уровнях рождаемости и смертности за какой-либо календарный период, например, один год. Для оценки скорости замещения реальных поколений нужно иметь соответствующую информацию за период, охватывающий жизнь поколений на протяжении 50 лет – от времени их появления и до момента, когда все представители каждого поколения вышли из репродуктивных возрастов.

#### 12.3.1. Брутто-коэффициент воспроизводства

Брутто-коэффициент воспроизводства женского населения – среднее число девочек, которое родила бы одна женщина, прожившая до конца

репродуктивного периода при сохранении на протяжении ее жизни возрастных уровней рождаемости того года, для которого рассчитан показатель. Брутто-коэффициент рассчитывается как произведение суммарного коэффициента рождаемости на долю девочек среди родившихся:

$$R = TFR \cdot \delta = \delta \cdot n \cdot \sum_{x=15}^{49} f_x, \text{ где } \delta - \text{доля девочек среди новорожденных.}$$

Как правило, она принимается примерно равной 0,488 и одинаковой для всех возрастов женщин. При расчете брутто-коэффициента делается допущение, что все дочери доживают до конца репродуктивного периода.

### 12.3.2. Нетто-коэффициент воспроизводства

Нетто-коэффициент исчисляется для женского населения, но при наличии соответствующей информации он может быть оценен как для мужского населения, так и для всего населения. В терминах замещения поколений *нетто-коэффициент воспроизводства населения* ( $R_0$ ) представляет собой среднее число девочек, рожденных за всю жизнь одной женщиной, дожившей до конца репродуктивного периода при данных уровнях рождаемости и смертности. Он измеряет скорость замещения материнского поколения дочерним.

Расчеты  $R_0$  выполняются по формуле:

$$R_0 = \delta \sum_{x=15}^{49} \frac{N_x}{P_x^f} \cdot \frac{L_x^f}{l_0}, \text{ где } \frac{N_x}{P_x^f} = f_x - \text{возрастной коэффициент рождаемости в}$$

возрасте  $x$ ,  $L_x^f$  – среднее число живущих женщин в возрасте  $x$  из таблицы смертности,  $l_0$  – корень таблицы смертности.

Поскольку нетто-коэффициент включает в себе комбинацию уровней рождаемости и смертности, его используют в качестве интегральной обобщающей характеристики воспроизводства населения. Однако часто приходится сталкиваться с некорректной интерпретацией этого показателя. Необходимо помнить, что вычисленный для гипотетического поколения нетто-коэффициент воспроизводства как мера замещения материнского поколения дочерним имеет смысл лишь в рамках модели стабильного населения.

Численность такого населения увеличивается (или уменьшается) в  $R_0$  раз за время  $T$ , равное средней длине поколения.

В стабильном населении нетто-коэффициент воспроизводства  $R_0$  соотношением  $R_0 = e^{rT}$  связан с истинным коэффициентом естественного прироста населения  $r$ . При  $r > 0$  в случае расширенного воспроизводства  $R_0 > 1$ , т.е. дочернее поколение многочисленнее материнского. В случае суженного воспроизводства из  $r < 0$  вытекает  $R_0 < 1$ , т.е. дочернее поколение не замещает материнского. При простом воспроизводстве, когда  $r = 0$ , нетто коэффициент будет равен 1, а численности дочерей и матерей будут совпадать.

### 12.3.3. Экономичность режимов воспроизводства

Для оценки экономичности разных режимов воспроизводства населения используется специальный показатель, который получил название «цена простого воспроизводства». Он представляет собой отношение брутто коэффициента  $R$  к нетто-коэффициенту воспроизводства  $R_0$  и показывает, сколько девочек в среднем необходимо родить женщине, чтобы обеспечить простую замену материнского поколения:  $\rho = R/R_0$ . Чем выше цена простого воспроизводства, тем ниже экономичность воспроизводства, и наоборот.

### 12.3.4. Индекс замещения поколений

Для того, что бы оценить брутто- и нетто- коэффициенты воспроизводства населения, необходимы возрастные показатели рождаемости. Однако, для большинства исторических популяций или населения некоторых развивающихся стран таких данных нет. Тогда в ряде случаев оценить скорость замещения поколений можно на основе данных переписей населения. Одним из таких показателей является индекс замещения поколений<sup>112</sup>, который рассчитывается на основе данных о возрастном составе населения и таблиц смертности за год проведения переписи населения по следующей формуле. Один из вариантов оценки индекса замещения выглядит следующим образом:

$$J = \frac{P_{0-4}^f}{P_{15-49}^f} : \frac{L_{0-4}^f}{L_{15-49}^f},$$

<sup>112</sup> Индекс замещения впервые был использован американским демографом У. Томпсоном в 1920 г.

где:  $P_{0-4}^f$  – численность девочек в возрасте от 0 до 4 исполнившихся лет включительно;

$P_{15-49}^f$  – численность женщин в репродуктивных возрастах;

$L_{0-4}^f$  и  $L_{15-49}^f$  – соответствующие показатели чисел живущих из таблиц смертности.

### 12.3.5. Нетто-коэффициент воспроизводства для реального поколения

Существует несколько методов оценки нетто-коэффициента воспроизводства реальных поколений. Самый очевидный из них заключается в применении стандартных формул для расчета коэффициентов воспроизводства, только в этом случае используются показатели рождаемости и смертности для реальных поколений. Оценки когортных показателей смертности выполнены только в нескольких развитых странах – там, где издавна налажен адекватный учет смертности населения.

Другим простым и очевидным способом нетто-коэффициента воспроизводства реальных поколений является вычисление отношения чисел родившихся в годы, отстоящих друг от друга на период, равный средней длине поколения.

## ЗАДАЧИ

### Задача 1. Расчеты показателей воспроизводства Российской Федерации.

Даны числа живущих в стационарном населении для женского населения и возрастные коэффициенты рождаемости Российской Федерации за 1987, 1993, 1997 и 2000 годы:

	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
Возрастные коэффициенты рождаемости $f_x$							
1987	48,5	170,6	122,6	67,8	27,8	6,1	0,2
1993	47,9	120,4	65	29,6	11,4	2,6	0,2
1997	36,2	99	66,2	31,5	10,8	2,2	0,1
2000	29,5	93,1	65,2	32,7	11,3	2,2	0,1
Числа живущих в стационарном населении $L_x$							
1987	4,87558 3	4,86227 3	4,84641 7	4,82624 5	4,79824 5	4,75715 4	4,69428 4
1993	4,86707 7	4,84541 4	4,81902 4	4,78578 4	4,73891 1	4,66838 7	4,56489 4
1997	4,88609	4,86435	4,83785	4,80559	4,76419	4,70702	4,62113

	9	2	9	4	4	1	6
2000	4,8906	4,86618	4,83641	4,79933	4,75171	4,68543	4,58951

Рассчитайте:

- 1) суммарные коэффициенты рождаемости;
- 2) брутто-коэффициенты воспроизводства;
- 3) нетто-коэффициенты воспроизводства.

Дайте интерпретацию полученным результатам.

### Задача 2. Анализ цены простого воспроизводства

На основе данных таблицы, в которой приведены обобщающие характеристики воспроизводства населения России:

- 1) рассчитайте цену простого воспроизводства;
- 2) проанализируйте динамику нетто и брутто-коэффициентов воспроизводства в России.

От чего зависит величина этих показателей?

годы	брутто-коэффициент воспроизводства	нетто-коэффициент воспроизводства	цена «простого» воспроизводства
1894–1903*	3,244	1,636	
1927**	3,282	1,681	
1939**	2,394	1,367	
1958–1959	1,276	1,186	
1964–1965	1,044	0,971	
1969–1970	0,972	0,934	
1974–1975	0,973	0,932	
1979–1980	0,911	0,874	
1986–1987	1,071	1,038	
1989	0,983	0,953	
1995	0,656	0,633	
2000	0,592	0,571	

Источник: Демографический ежегодник России 2001. М., 1998; \* Оценка относится к европейским губерниям Российской империи. см. Воспроизводство населения СССР. М., 1983, с. 273; \*\* См. Андреев Е.М., Дарский Л.Е., Харьковская Т.Н. Население России 1927–1958. М., 1998.

### Задача 3. Исследование изменений брутто и нетто коэффициентов в ходе демографического перехода

Пусть нам известны следующие показатели динамики рождаемости и смертности некоторого гипотетического населения:

А. Числа живущих женщин в стационарном населении, рассчитанные с помощью типовых таблиц смертности семейства «Запад» для соответствующих уровней продолжительности предстоящей жизни с рождения:

Возраст	Время от начала демографического перехода (лет)				
	0	30	60	90	120
15-19	236703	304987	362924	414498	457842
20-24	220357	290354	351178	406085	453336
25-29	202471	273905	337660	396092	447761
30-34	184072	256496	323031	385058	441366
35-39	165494	238319	307330	372899	433921
40-44	147505	219946	290829	359518	424987
45-49	130573	201685	273525	344498	413745
$E_0$	25	35	45	55	65

Б. Суммарные коэффициенты рождаемости и распределение родившихся по возрастным группам женщин:

Возраст	Время от начала демографического перехода (лет)				
	0	30	60	90	120
15-19	0,140	0,123	0,101	0,083	0,066
20-24	0,240	0,242	0,245	0,248	0,250
25-29	0,220	0,243	0,273	0,296	0,320
30-34	0,185	0,197	0,212	0,225	0,237
35-39	0,140	0,130	0,117	0,106	0,096
40-44	0,065	0,056	0,045	0,037	0,028
45-49	0,010	0,008	0,006	0,005	0,003
$E_0$	5,500	6,25	4,300	3,200	2,100

Оцените брутто- и нетто-коэффициенты воспроизводства, показатель цены воспроизводства. Прокомментируйте полученные результаты.

#### Задача 4

На основе оценок нетто- и брутто-коэффициентов для ряда стран мира за 1995-2000 год:

- рассчитайте показатель цены воспроизводства;
- сгруппируйте страны по типам воспроизводства.

Страна	Брутто-коэффициент	Нетто-коэффициент	Страна	Брутто-коэффициент	Нетто-коэффициент
Афганистан	3,35	2,13	Индия	1,65	1,38
Аргентина	1,39	1,34	Ирак	2,78	2,26
Австралия	0,92	0,91	Китай	0,91	0,85
Бангладеш	1,66	1,33	Либерия	3,35	1,97
Бельгия	0,79	0,78	Мексика	1,52	1,44
Боливия	2,34	1,97	Пакистан	2,69	2,28
Вьетнам	1,66	1,47	Россия	0,75	0,72
Германия	0,63	0,62	Таиланд	0,95	0,89
Замбия	2,95	2,1	Филиппины	1,94	1,79

Источник: UN Database

#### Задача 5. Интегральная задача по воспроизводству

Задана следующая возрастная структура некоторого гипотетического населения:

Возрастные группы	Мужчины	Женщины
0 – 4	27000	26400
5 – 9	23000	22600
10 – 14	20294	19859
15 – 19	18851	17998
20 – 24	16776	15654
25 – 29	14566	13424
30 – 34	12650	11558
35 – 39	11044	9962
40 – 44	9550	8419
45 – 49	8034	6953
50 – 54	6472	6089
55 – 59	5526	4782
60 и старше	9500	15800

Об этом населении также известно следующее:

- возрастные коэффициенты рождаемости;
- параметры смертности в этом населении описываются типовой таблицей смертности семейства «Запад» (Приложение 1);
- на 100 девочек рождается 105 мальчиков.

Предполагая, что возрастные показатели рождаемости и смертности в данном населении изменяться не будут, рассчитайте:

- 1) Общие коэффициенты рождаемости и смертности;

- 2) Суммарный коэффициент рождаемости;
- 3) Брутто- и нетто- коэффициенты воспроизводства;
- 4) Средний возраст матери при рождении ребенка;
- 5) Число рождений к возрасту 30 лет у одной женщины;
- 6) Вероятность того, что у юноши в возрасте 20 лет будет жива мать, если возраст матери при рождении ребенка был равен 25 годам.
- 7) Вероятность того, что у юноши в возрасте 20 лет будут живы оба родителя, если возраст матери при рождении ребенка был равен 25 годам, а отца – 30 годам.

#### *Задача 6*

Основываясь на данных таблиц смертности и возрастной структуры населения Российской Федерации за 1897, 1926 и 2000 годы (Приложение 1), оцените индексы замещения поколений. Дайте интерпретацию полученным результатам. Сравните полученные результаты с данными *Задачи 2* «Анализ цены простого воспроизводства».

#### *Задача 7*

По данным о динамике чисел родившихся в Российской Федерации (Приложение 1) оцените нетто-коэффициент воспроизводства. Дайте интерпретацию полученным результатам. В чем заключаются недостатки использованного Вами метода?

#### *Задача 8*

**РАЗДЕЛ 13. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОГНОЗЫ НАСЕЛЕНИЯ<sup>113</sup>**

Функциональными группами называются совокупности людей, с которыми связана деятельность определенных организаций, предприятий, отраслей производства<sup>114</sup>. Прогнозы численности и структуры таких групп населения называют функциональными прогнозами населения. Функциональные прогнозы делятся на прогнозы «предложения населения» (population supply or demographic supply projection) и прогнозы «спроса на население» (population demand projections). Прогнозы «предложения населения» основаны на результатах демографических расчетов, и в первую очередь – на прогнозах численности и возрастно-полового состава населения, которые выполнены когортно-компонентным методом. Прогнозы «спроса на население» основаны на моделях функционирования организации (предприятия) или отрасли хозяйствования<sup>115</sup>.

Все функциональные прогнозы, основанные на результатах демографических прогнозов, разрабатываются по одной логической схеме, рассчитываются с помощью аналогичных вычислительных процедур и различаются только в деталях. Общая схема перспективных оценок функциональных групп выглядит следующим образом<sup>116</sup>:

$$F(i,j,t)=P(i,j,t)*r(i,j,t)*u(i,j,t)*c(i,j,t),$$

где:

i – возраст;

j – пол;

t – дата, на которую выполняется прогноз;

<sup>113</sup> В разделе использовались статистические данные Международной организации труда, Отдела народонаселения ООН, Бюро переписей США, Национальных статистических комитетов Кыргызстана, Японии и Швеции.

<sup>114</sup> Термин функциональные прогнозы появился, по-видимому, в США в 1970-е гг. См. также: Editor's Introduction. Chapter 18. Functional Population Projection. In: Reading in Population Research Methodology. Volume 5. Population Models, Projections and Estimates. Chicago, 1993.

<sup>115</sup> у Прогнозы спроса, в отличие от прогноза предложения «населения», основаны в первую очередь на экономических, а не демографических моделях.

<sup>116</sup> См. Bouge D., Techniques for making functional Population Projections. Chicago. 1980.

Для проведения вычислений на компьютере следует записать всю систему уравнений в матричной форме. Читатель, знакомый с матричным исчислением, без труда может сделать это.

$F(i,j,t)$  – численность прогнозируемой функциональной группы в возрасте  $i$  лет,  $j$ -го пола в момент  $t$ ;

$P(i,j,t)$  – численность возрастной группы  $i$  лет  $j$ -го пола в момент  $t$ ;

$r(i,j,t)$  – частота функциональных событий в возрастной группе  $i$  лет  $j$ -го пола в момент  $t$ ;

$u(i,j,t)$  – отношение численности одной функциональной группы в возрасте  $i$  лет к численности другой того же пола в момент  $t$ ;

$c(i,j,t)$  – доля функциональной подгруппы в общей численности возрастной группы  $i$  лет  $j$ -го пола в момент  $t$ .

Последние три параметра используются в решении в зависимости от условий поставленной задачи.

Другой составляющей прогноза являются перспективные оценки специальных параметров  $r(i,j,t)$ ,  $u(i,j,t)$  и  $c(i,j,t)$ . Последние выполняются или на основе гипотезы о неизменности этих параметров в будущем, или с помощью эконометрических моделей, или задаются как целевые (нормативные) величины.

### 13.1. ПРОГНОЗЫ ЧИСЛЕННОСТИ И СОСТАВА ДОМОХОЗЯЙСТВ

Существует несколько методов прогнозирования численности домохозяйств и семей. Простейшие из них основаны на экстраполяции чисел домохозяйств или соотношений между числом домохозяйств и численностью всего населения или населения в трудоспособных возрастах. Перспективные оценки численности и состава домохозяйств можно получить с помощью **метода глав домохозяйств (семейств)**:

$$H(i,j,t+x) = P(i,j,t+x) * h(i,j,t+x) \quad (1),$$

где:

$H(i,j,t+x)$  – число домохозяйств, возглавляемых мужчинами ( $l=1$ ) или женщинами ( $l=2$ ) в возрасте  $j$  на момент времени  $t+x$ ;

$P(i,j,t+x)$  – численность мужчин ( $l=1$ ) или женщин ( $l=2$ ) в возрасте  $j$  на момент времени  $t+x$ ;

$h(i,j,t+x)$  – коэффициент глав домохозяйств.

Коэффициент глав домохозяйств определяется как отношение  $h(i,j,t) = N(i,j,t)/P(i,j,t)$ , где  $N(i,j,t)$  – число глав домохозяйств  $i$ -го пола в возрасте  $j$  лет в момент времени  $t$ ;

$P(i,j,t)$  – численность населения  $i$ -го пола в возрасте  $j$  лет в момент времени  $t$ .

Общая численность домохозяйств в момент  $t+x$  рассчитывается по формуле:

$$\sum_i \sum_j H(i, j, t+x) = \sum_i \sum_j P(i, j, t+x) \cdot h(i, j, t+x)$$

*Пример 1. Прогноз численности и размера домашних хозяйств:*

*Известны перспективные численности половозрастного состава населения и коэффициенты глав домохозяйств:*

Возраст	Численность (тыс.)				Коэффициенты глав домохозяйств			
	мужчины		женщины		мужчины		женщины	
	2005	2010	2005	2010	2005	2010	2005	2010
10-14	729,9	729,3	685,2	697,4	0,0405	0,0338	0,0015	0,0013
15-19	618,5	724,9	574,9	680,2	0,0683	0,0613	0,0044	0,0037
20-24	481,5	613,4	442,5	569,3	0,1034	0,0962	0,0088	0,0082
25-29	397,1	476,7	354,5	437,5	0,4935	0,4933	0,0156	0,0098
30-34	355,9	392,2	342,4	349,9	0,5356	0,5358	0,0219	0,0161
35-39	351,5	359,2	345,1	337	0,5653	0,5691	0,0523	0,054
40-44	303,6	343,4	293,5	338,2	0,5749	0,5799	0,0851	0,0923
45-49	214,5	293,2	200,2	285,7	0,5882	0,5933	0,117	0,1249
50-54	142,8	203,2	151,2	192,3	0,591	0,5966	0,1819	0,1891
55-59	175,3	131,5	162,2	141,9	0,5808	0,5866	0,218	0,2254
60-64	136,3	154,4	145,9	146,3	0,5592	0,5649	0,2468	0,2534
65-69	103,6	112,4	105,1	124	0,5416	0,5448	0,2651	0,2734
70-74	65,9	77,7	80	81,7	0,5011	0,5077	0,2788	0,2853
75+	45,6	63	72,9	86,4	0,4821	0,4874	0,2959	0,3028
	4122	4674,5	3955,6	4467,8				

*Вычисления, выполненные по формуле (1), представлены в следующей таблице:*

Возраст	Численность домохозяйств (1000)				Все домохозяйства	
	Главы - мужчины		Главы – женщины		2005	2010
	2005	2010	2005	2010		
10-14	29,6	24,7	1,0	0,9		25,6
15-19	42,2	44,4	2,5	2,5	44,8	47,0
20-24	49,8	59,0	3,9	4,7	53,7	63,7

25-29	196,0	235,2	5,5	4,3	201,5	239,4
30-34	190,6	210,1	7,5	5,6	198,1	215,8
35-39	198,7	204,4	18,0	18,2	216,8	222,6
40-44	174,5	199,1	25,0	31,2	199,5	230,4
45-49	126,2	174,0	23,4	35,7	149,6	209,6
50-54	84,4	121,2	27,5	36,4	111,9	157,6
55-59	101,8	77,1	35,4	32,0	137,2	109,1
60-64	76,2	87,2	36,0	37,1	112,2	124,3
65-69	56,1	61,2	27,9	33,9	84,0	95,1
70-74	33,0	39,4	22,3	23,3	55,3	62,8
75+	22,0	30,7	21,6	26,2	43,6	56,9
Итого	1381,1	1567,9	257,5	291,9	1638,7	1859,8

Средний размер домохозяйств в 2005 г. равен  $(4122+3955,6)/1638,7$ ; в 2010 г. –  $(46745+44678)/1859,8$ .

### 13.2. ПРОГНОЗЫ ЧИСЛЕННОСТИ И СТРУКТУРЫ ЭКОНОМИЧЕСКИ АКТИВНОГО НАСЕЛЕНИЯ

Демографический прогноз численности и возрастно-полового состава является одной из составляющих национального или регионального прогноза «предложения рабочей силы». Другой составляющей прогноза являются гипотетические оценки возрастно-половых коэффициентов экономической активности населения, которые рассчитываются по формуле:

$$l(i,j,t) = L(i,j,t) / P(i,j,t),$$

где  $L(i,j,t)$  – численность экономически активного населения мужского ( $j=1$ ) или женского ( $j=2$ ) пола в возрасте  $i$ ;

$P(i,j,t)$  – численность соответствующей возрастно-половой группы.

Оценка перспективной численности экономически активного населения в возрасте  $i$  на  $t+n$  год выполняется по следующей формуле:

$$L(i,j,t+n) = P(i,j,t+n) * l(i,j,t+n).$$

На основе полученных данных легко вычислить различные агрегированные показатели, такие как численность экономически активного населения в укрупненных возрастных группах, общую численность экономически активного населения, численность населения, не входящего в состав рабочей силы. Последний показатель для отдельных возрастно-половых групп рассчитывается так:

$$NL(i,j,t+n) = P(i,j,t+n) - L(i,j,t+n),$$

где  $NL(i,j,t+n)$  – численность населения, не являющегося экономически активным.

Будущий отраслевой состав рабочей силы можно получить, умножая численность совокупной рабочей силы на специальные параметры, которые рассчитываются на основе предположений о грядущих изменениях в отраслевом составе народного хозяйства. По аналогичной схеме разрабатывается прогноз профессионального состава рабочей силы. На основе прогнозов экономически активного населения можно получить оценки численности и возрастно-полового состава занятых и безработных. Для этого необходимы возрастно-половые коэффициенты занятости и безработицы.

### 13.3. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОСТИ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

Одним из основных способов прогнозирования численности и состава учеников в масштабе страны или многонаселенных административно-территориальных образований является метод степени (коэффициента) охвата обучением. Величина последнего рассчитывается как отношение числа учащихся на ступени  $g$  обучения к общей численности соответствующей возрастной группы:

$$e(i,j,g,t) = E(i,j,g,t) / P(j,j,t),$$

где:

$i$  – возраст;

$j$  – пол ( $j=1$  – мужской;  $j=2$  – женский)

$E(i,j,g,t)$  – численность учащихся мужчин или женщин в возрасте  $i$  лет на ступени  $g$  в момент времени  $t$ ;

$P(j,j,t)$  – численность мужчин или женщин в возрасте  $i$  в момент времени  $t$ .

Прогностическое уравнение метода степени охвата обучением:

$$E(i,j,g,t+n) = P(i,j,t+n) * e(i,j,g,t+n),$$

где  $P(i,j,t+n)$  – численность мужчин или женщин в возрасте  $i$  в момент  $t+n$ ;

$E(i,j,t+n)$  – число учащихся мужчин или женщин в возрасте  $i$  в момент  $t+n$ .

$e(i,j,t+n)$  – степень охвата обучением мужчин или женщин в возрасте  $i$  в момент  $t+n$ .

Общая численность учащихся на ступени  $g$  будет равна:

$$E(g, t+n) = \sum_i \sum_j E(i, j, g, t+n),$$

Для оценки численности учащихся по дополнительному признаку, например, по их принадлежности к государственным или частным учебным заведениям, помимо возраста, пола и ступени обучения, следует с учетом этого признака рассчитать новые показатели  $\epsilon$  или  $e$ . Тогда перспективная численность студентов, обучающихся, например, в частных вузах  $E(i, j, g, p, t+n)$ , будет равна:

$$E(g, p, t+n) = \sum_i \sum_j E(i, j, t+n) \cdot \tau(i, j, g, p, t+n),$$

где  $\tau(i, j, g, p, t+n)$  – доля студентов ( $g$ ), обучающихся в частных вузах ( $p$ ) среди мужчин или женщин в возрасте  $i$  на момент  $t$ .

Для определения необходимой численности преподавателей используется показатель нагрузки учениками одного преподавателя (число школьников или студентов, приходящихся на одного преподавателя). Этот показатель может задаваться нормативно, рассчитываться на основе трендов или специальных моделей. Будущая численность преподавателей на каждой ступени обучения равна отношению перспективной численности учеников к перспективной оценке нагрузки учениками.

#### Пример 2

Из результатов демографического прогноза для некоторой развивающейся страны  $N$  известны перспективные оценки численности контингентов учащихся разных ступеней обучения (табл. 13.1).

Таблица 13.1. Численность населения в возрасте от 6 до 24 лет (тыс. чел.)

Возраст	Мужчины		Женщины	
	2005	2010	2005	2010
6	169,8	188,9	163,0	180,4
7	164,0	184,8	157,5	176,6
8	158,6	180,5	152,4	172,8
9	153,9	176,2	148,0	168,8
10	149,5	171,8	143,7	164,8
11	146,7	167,4	140,7	160,8
12	144,8	163,1	138,6	156,7
13	144,0	158,8	137,3	152,6

14	144,3	154,4	137,1	148,4
15	147,4	149,4	139,2	143,4
16	147,5	146,2	138,8	140,2
17	146,2	144,1	137,1	137,9
18	143,7	143,1	134,4	136,4
19	140,1	142,7	130,7	135,6
20	134,8	144,4	125,5	136,5
21	129,2	144,7	120,1	136,2
22	123,0	144,7	114,2	135,7
23	116,5	144,1	107,9	134,6
24	109,9	142,2	101,7	132,4

Кроме того, произведены оценки коэффициента охвата обучением на каждой ступени (табл. 13.2):

Таблица 13.2. Коэффициенты охвата обучением

Школы	Мужчины		Женщины	
	2005	2010	2005	2010
Начальная	0,68	0,723	0,637	0,669
Средняя неполная	0,508	0,55	0,322	0,353
Средняя полная	0,225	0,251	0,126	0,15
ВУЗы	0,105	0,119	0,068	0,082

Требуется выполнить прогноз численности учащихся на каждой ступени обучения. Известно, что в начальной школе (1 – 4 классы) учатся дети от 6 до 9 лет включительно; в средней неполной школе (5 – 8 классы) – от 10 до 13 лет включительно; в средней общей школе (9 – 11 классы) – от 14 до 17 лет включительно; в ВУЗах – старше 17 лет.

Первый шаг выполнения прогноза заключается в расчете числа детей в возрастах, соответствующих каждой ступени обучения. Так, в 2005 году число мальчиков в возрасте от 6 до 9 лет включительно будет равняться  $169,8+164,0+158,6+153,9=646,3$ . Аналогично рассчитываются численности учащихся на остальных ступенях обучения в 2005 и 2010 гг. В итоге получаем следующую таблицу:

Таблица 13.3. Численность детей, распределенных по школьным возрастам

Школы	Мужчины		Женщины	
	2005	2010	2005	2010

Начальная	646,3	730,4	620,9	698,6
Средняя неполная	585	661,1	560,3	634,9
Средняя полная	439,2	450	415,1	432
ВУЗы	1043,4	1150	971,6	1085,3

Далее, попарно умножая данные таблицы 2 на данные таблицы 3, получаем численность учеников на каждой ступени обучения:

Таблица 13.4. Численность учащихся на каждой ступени обучения

Школы	Мужчины		Женщины	
	2005	2010	2005	2010
Начальная	439,5	528,1	395,5	467,4
Средняя неполная	297,2	363,6	180,4	224,1
Средняя полная	98,8	113,0	52,3	64,8
ВУЗы	109,6	136,9	66,1	89,0

Для анализа динамики и прогноза как отдельных, так и совокупности образовательных учреждений используется матричные модели, которые выглядят следующим образом:

$$P = \begin{array}{c|cc|cc|c} P_{11} & & 0 & 0 & 0 \\ P_{21} & P_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & P_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{i+1i} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & P_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{nn-1} & P_{nn} \end{array}$$

где

$i=1, \dots, n$  – число классов (курсов) в учебном заведении;

$P_{ii}$  – вероятность быть оставленным на второй год в классе  $i$ , или вероятность возвращения на курс  $i$  после годового академического отпуска;

$P_{i+1,i}$  – вероятность перейти с курса  $i$  курс  $i+1$ .

Элементы матрицы рассчитываются на основе статистики образовательных учреждений, которая содержит детальную информацию о числе зачисленных на первый курс (в первый класс), о числе переведенных из других учебных заведений, о числе отчисленных и получивших академический отпуск, о числе восстановленных после академического отпуска, о числе умерших учеников. Матрица может быть рассчитана не только для учебного заведения в целом, но и для их отдельных подразделений: факультетов, специализаций и др.

В некоторых вузах демографы исследуют учебные биографии отдельных когорт учащихся, т.е. тех, кто был зачислен одновременно на первый курс. Для этого используется аппарат таблиц множественного выбытия. Возможную смену «учебного» положения студента определяют следующие процессы: перевод на следующий курс, отчисление, уход в академический отпуск, смерть. С точки зрения моделирования мобильность учащихся аналогична миграционным процессам. Поэтому для анализа динамики и прогноза мобильности учащихся как отдельных, так и совокупности образовательных учреждений можно использовать упоминавшийся выше аппарат таблиц множественного выбытия или матричной алгебры.

Пусть  $S(t-1) = (S_1(t-1) \ S_2(t-1) \ \dots \ S_n(t-1))$  – вектор-строка численности студентов или школьников на каждом курсе (в классе) в начале учебного года  $t-1$ . Пусть  $Z(t) = (Z_1(t) \ Z_2(t) \ \dots \ Z_n(t))$  – вектор численности студентов, зачисленных в начале учебного года на первый курс или переведенных на другие курсы из других вузов или школ.

Пусть нам известна матрица учебной мобильности

$$P = \begin{array}{c|cc|cc|cc} & P_{11} & P_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & P_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & P_{ii} & P_{ii+1} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & P_{i+1i+1} & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{n-1n-1} & P_{n-1n} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{nn} \end{array}$$

где:

$i=1, \dots, n$  – число классов (курсов) в учебном заведении;

$P_{ii+1}$  – вероятность перейти с курса  $i$  курс  $i+1$ .

$P_{ii}$  – вероятность быть оставленным на второй год в классе  $i$  или вероятность возвращения на курс  $i$  после годового академического отпуска.

Все вероятности определяются по тому же принципу, что и в матрице вероятностей миграционного перехода.

Тогда численность студентов в начале учебного года  $t$  будет равна

$$S(t) = S(t-1) * P + E(t)$$

Для реализации прогноза численности учащихся в целом и на отдельных курсах следует разработать гипотезы об изменении вероятностей перехода, а

также о зачислении поступивших на первый курс (класс) или переведенных из других учебных заведений. Результаты прогноза используются для оценок других параметров, необходимых для обеспечения условий функционирования системы образования, в частности, конкурса в вузы, численности и структуры преподавателей, необходимого оборудования и пр. Достоинством приведенного метода является то, что с его помощью можно решить основную задачу планирования образования: сколько надо принять студентов на первый курс для того, чтобы осуществить заданный выпуск по определенной специальности. Однако метод матриц перехода заметно усложняется, если необходимо получить оценки с учетом половозрастного состава учащихся.

#### 13.4. ПРОГНОЗЫ УРОВНЕЙ ЗАНЯТОСТИ И БЕЗРАБОТИЦЫ

Согласно международным стандартам, экономически активное население включает в себя лиц обоего пола, предлагающих свой труд для производства товаров или услуг в течение определенного периода времени, т.е. занятых и ищущих работу. Эквивалентами этого понятия являются категории «предложение труда» и «рабочая сила». Динамика численности и возрастно-половой состав экономически активного населения в значительной степени определяются демографическими тенденциями. Поэтому национальный или региональный прогноз «предложения рабочей силы» должен быть основан на перспективных оценках численности и состава населения. Другой составляющей прогноза являются гипотетические оценки возрастно-половых коэффициентов экономической активности населения, которые рассчитываются по формуле

$$l(i,j,t)=L(i,j,t)/P(i,j,t),$$

где  $L(i,j,t)$  – численность экономически активного населения мужского ( $j=1$ ) или женского ( $j=2$ ) пола в возрасте  $i$ ;

$P(i,j,t)$  – численность соответствующей возрастно-половой группы.

Примеры коэффициентов экономической активности по возрасту и полу приведены в таблице 13.5.

Таблица 13.5. Коэффициенты экономической активности населения России, США и Индии в 2000 году (на 100 человек)

	мужчины	женщины
--	---------	---------

Возраст	Россия	США	Индия	Россия	США	Индия
15-19	20,7	40,2	52,7	11,6	37,46	35,4
20-24	75,5	78,5	86,2	63,6	72,42	44,0
25-29	90,9	90,9	96,1	79,5	79,87	45,1
30-34	91,8	93,2	97,5	82,1	79,8	54,1
35-39	91	93,4	98,1	86,3	81,1	47,4
40-44	90,3	92,2	98,0	88,1	82,15	50,7
45-49	88,6	92,2	97,4	86,8	80,06	54,8
50-54	85,3	88,6	95,0	78,9	72,09	41,4
55-59	65,2	76,6	90,5	33,7	58,96	38,9
60-64	29,2	50,3	70,3	16	33,2	28,0
65+	6,4	13,5	52,7	2,5	7,41	35,4
Всего (15+)	67,1	72,4	84,5	51,8	58,8	42,1

Источник: International Labor Organization, Statistical Database.

Для прогноза коэффициента экономической активности используются те же методы, что и для других типов специальных параметров функциональных прогнозов: гипотеза постоянства коэффициентов, эконометрические модели, целевые (нормативные) оценки коэффициентов. При этом необходимо учитывать изменения в уровне образования населения, возможные изменения в комплектации вооруженных сил, повышение возраста выхода на пенсию, тенденции рождаемости и особенности семейной политики, в частности, изменение продолжительности отпуска по уходу за ребенком.

Процедура расчета перспективной численности экономически активного населения в возрасте  $i$  на  $t+n$  год можно представить следующим образом:

$$L(i,j,t+n) = P(i,j,t+n) * l(i,j,t+n).$$

На основе полученных данных легко вычислить различные агрегированные показатели, такие как численность экономически активного населения в укрупненных возрастных группах, общую численность экономически активного населения, численность населения, не входящего в состав рабочей силы. Последний показатель для отдельных возрастно-половых групп рассчитывается так:

$$NL(i,j,t+n) = P(i,j,t+n) - L(i,j,t+n),$$

где  $NL(i,j,t+n)$  – численность населения, не являющегося экономически активным. К этой группе населения относится значительная часть учащейся

молодежи, военнослужащие и другие категории населения, не занятые и не ищущие работу в народном хозяйстве.

Выполняя национальный прогноз рабочей силы, следует учитывать, что уровни экономической активности могут существенно различаться у жителей городов и сел, по этническим, образовательным и другим группам населения. Экономическая активность женщин зависит от брачного состояния: у женщин, никогда не состоявших в браке, она заметно выше по сравнению с замужними женщинами. При наличии результатов демографических прогнозов, а также показателей экономической активности, с помощью общей процедуры расчетов можно получить оценки предложения труда от соответствующих групп населения в будущем, а также определить вклад каждой из них в изменение уровня экономической активности всего населения.

С практической точки зрения интерес представляют прогнозы рабочей силы с учетом ее отраслевого и профессионального состава, а также численности занятых и безработных. Будущий отраслевой состав рабочей силы можно получить, умножая численность совокупной рабочей силы на специальные параметры, которые рассчитываются на основе предположений о грядущих изменениях в отраслевом составе народного хозяйства. Оценки возрастного состава отраслевых групп, как правило, не производятся. По аналогичной схеме разрабатывается прогноз профессионального состава рабочей силы. При расчете специальных параметров учитываются вероятные изменения в будущем образовательном составе населения, новации в технологиях производства и тенденции экономического развития.

С помощью прогнозов экономической активности, основанных на расчетах будущей численности и состава населения, можно получить оценки численности и возрастно-полового состава занятых и безработных. Для этого следует разработать гипотезы о двух составляющих коэффициента экономической активности по полу и возрасту – коэффициентов занятости и безработицы. Другой подход к оценкам масштабов безработицы основан на сопоставлении прогнозов предложения и спроса на рабочую силу.

### 13.5. ПРОГНОЗЫ СПРОСА НА ТРУД

Существует несколько методов прогноза спроса на труд, основанных не на демографических, а на экономических прогнозах. Одним из них является известный в эконометрике метод производственных функций, которые выражают количественные соотношения между выпускаемой продукцией, с одной стороны, и используемыми ресурсами, с другой. Степенная производственная функция с  $n$  ресурсами имеет следующий общий вид:

$$Y = a \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

В этом уравнении параметры  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  представляют собой эластичность показателя выпуска  $Y$  по соответствующему ресурсу. Обычно предполагается, что  $|\alpha_i| < 1$  для всех  $i=1 \dots n$ . Постоянная  $a$  задает размерность.

Рассмотрим в качестве примера прогноз численности занятых в отдельных отраслях экономики. Для этого воспользуемся распространенной в экономическом анализе функцией Кобба-Дугласа в следующей форме:

$$Y(i) = \gamma(i) \cdot C(i,t)^{\alpha(i)} \cdot L(i,t)^{\beta(i)} \cdot e^{\rho(i) \cdot t} \quad (1)$$

Это уравнение выражает количественные соотношения между индикатором выпускаемой продукции  $Y(i)$  отраслю  $i$  в году  $t$ , с одной стороны, и размером капитала  $C(i,t)$  и численностью занятых  $L(i,t)$ , а также техническим прогрессом  $e^t$ , с другой. Параметры  $\alpha(i)$  и  $\beta(i)$  представляют собой эластичность выпуска от величины капитала и численности занятых, а параметр  $\rho(i)$  отражает влияние технического прогресса на величину выпуска. При прогнозировании занятости в качестве переменной  $Y(i)$  следует использовать величину добавленной стоимости, произведенной в отрасли или компании  $i$ .

От уравнения (1) легко перейти к обратной функции Кобба-Дугласа, в которой численность занятых является зависимой переменной:

$$L(i,t)^{\beta(i)} = \gamma(i)^{1/\beta(i)} \cdot Y(i)^{1/\beta(i)} \cdot C(i,t)^{\alpha(i)/\beta(i)} \cdot e^{\rho(i)/\beta(i) \cdot t}$$

Путем лог-линейного преобразования полученное уравнение можно привести к виду, позволяющему оценить неизвестные постоянные  $\alpha(i)$ ,  $\beta(i)$ ,  $\rho(i)$  и  $\gamma(i)$ :

$$\ln L(i,t) = \zeta(i) - \varsigma(i) \ln Y(i) + \lambda(i) \ln C(i,t) + \psi(i) \cdot t$$

где  $\zeta(i) = \ln \gamma(i) / \beta(i)$ ;  $\varsigma(i) = 1 / \beta(i)$ ;  $\lambda(i) = \alpha(i) / \beta(i)$ ;  $\psi(i) = \rho(i) / \beta(i)$ .

После того, как собраны данные по рядам динамики переменных  $Y$  и  $C$ , оценка параметров выполняется методами регрессионного анализа. Статистические результаты позволяют оценить, насколько верно определен вид производственной функции. Если эти результаты неудовлетворительны, то следует выбрать другой вариант функции Кобба-Дугласа. При наличии проектных оценок  $Y$  и  $C$  и постоянных  $\zeta(i)$ ,  $\varsigma(i)$ ,  $\lambda(i)$  и  $\psi(i)$  без труда можно получить прогноз численности занятых в отрасли  $i$ .

Суммируя перспективные оценки по отдельным отраслям, можно получить общее число занятых в народном хозяйстве:

$$L(t+n) = \sum L(i, t+n)$$

Сравнение результатов прогноза спроса на труд с прогнозами предложения труда позволяет оценить степень сбалансированности национального или регионального рынка труда в году  $t+n$ , а также реалистичность выбранной политики в области занятости. Если коэффициенты экономической активности включают в себя военнослужащих армии или органов безопасности, то при оценках масштаба безработицы следует проводить соответствующую коррекцию величины спроса.

Достоинства и недостатки функции Кобба-Дугласа достаточно подробно описаны в научной литературе. Стоит заметить, что в случае, когда быстро изменяется возрастной состав занятых или оборудования, к результатам прогноза, полученного на их основе, следует относиться с большой осторожностью. Производственные функции можно использовать для прогноза занятости не только на макроэкономическом уровне, но и на уровне крупных фирм и предприятий. На практике их рекомендуются применять для долгосрочных прогнозов занятости. Для кратковременных оценок существуют другие, более простые методы, основанные как на экономических, так и на демографических прогностических моделях.

## **ЗАДАЧИ**

### *Задача 1*

Известна следующая информация о численности домохозяйств и численности населения:

годы	Численность домохозяйств	Численность населения в возрасте 20 – 64 года
1980	11101	26910
1985	11879	28641
1990	12582	31001
1995	13378	33575
2000	14219	35202
2005	?	41090
2010	?	46104
2015	?	50693
2020	?	56076

Требуется определить численность домохозяйств в 2005, 2010, 215 и 2020 гг.:

- используя метод простой экстраполяции численности домохозяйств;
- используя метод экстраполяции соотношения численности населения и численности домохозяйств.

Сравните полученные результаты. Какой метод, по Вашему мнению, должен дать более точные результаты?

### Задача 2

Рассчитайте коэффициенты глав домохозяйств по данным переписи населения Кыргызстана, проведенной в 1999 году.

Возрастно-половая структура населения и глав домохозяйств в Кыргызстане, 1999 г.:

Возраст	Городское население				Женское население			
	мужчины		женщины		мужчины		женщины	
	главы	все	главы	все	главы	все	главы	все
0-4	0,2	74,9	0,2	71,5	0,1	206,2	0,1	198,1
5-9	0,3	86,8	0,3	84,0	0,5	217,5	0,3	210,1
10-14	1,0	84,4	0,6	83,4	1,0	210,2	0,7	205,1
15-19	12,6	86,5	11,0	91,8	3,8	162,2	1,2	152,4
20-24	22,7	81,9	13,1	85,9	17,3	135,3	2,7	127,5
25-29	34,8	72,9	14,7	78,1	49,5	122,9	5,0	113,9
30-34	42,7	66,7	16,7	69,4	73,0	109,4	7,5	105,5
35-39	45,6	64,5	20,0	69,3	86,1	107,0	11,6	105,2
40-44	37,7	50,9	19,4	56,8	71,5	82,9	12,5	82,8
45-49	28,4	37,9	17,1	43,6	52,5	58,9	12,1	60,2
50-54	17,0	22,4	11,8	26,9	28,0	31,1	8,2	32,7
55-59	14,7	18,6	11,6	23,7	30,2	32,5	10,6	33,9
60-64	16,7	20,6	14,6	27,7	33,1	35,3	14,8	40,1

65-69	11,9	14,4	12,7	21,8	28,7	30,3	16,1	36,4
70+	16,0	18,8	27,0	42,5	34,2	36,6	35,1	62,1
всего	302,5	802,3	190,3	876,4	509,6	1578,2	138,6	1566,1

Сравните возрастные распределения коэффициентов для мужского и женского населения, для городского и сельского населения. Как Вы объясните обнаруженные различия?

### Задача 3

На основе следующих данных выполните прогноз численности и среднего размера домашних хозяйств на 2005 и 2010 гг.:

возраст Т	Численность (тыс.)				Коэффициенты глав домохозяйств			
	мужчины		женщины		мужчины		женщины	
	2005	2010	2005	2010	2005	2010	2005	2010
10-14	285,2	343,5	685,2	697,4	0,0334	0,0262	0,0013	0,0012
15-19	378,8	384,6	574,9	680,2	0,0613	0,0546	0,0037	0,0028
20-24	348,4	446,3	442,5	569,3	0,0955	0,0889	0,0084	0,0075
25-29	277	381,7	354,5	437,5	0,4923	0,4913	0,01	0,0051
30-34	247,3	298,9	342,4	349,9	0,5357	0,5407	0,0166	0,0104
35-39	180,9	259,4	345,1	337	0,5646	0,571	0,1557	0,0571
40-44	163,5	191,3	293,5	338,2	0,578	0,5812	0,0937	0,1017
45-49	132,9	170,9	200,2	285,7	0,592	0,5967	0,1255	0,1333
50-54	88,3	136,1	151,2	192,3	0,5957	0,6013	0,1903	0,1973
55-59	55	87,9	162,2	141,9	0,5861	0,5921	0,2258	0,2329
60-64	60,5	53,1	145,9	146,3	0,5639	0,5696	0,2545	0,2616
65-69	42,8	54,7	105,1	124	0,5433	0,5477	0,2734	0,281
70-74	25,2	35,5	80	81,7	0,5089	0,515	0,2869	0,2934
75+	22,3	29,4	72,9	86,4	0,4936	0,4984	0,303	0,31
Итого	2308,1	2873,3	1890,6	2362,3				

### Задача 4

Для страны N известны коэффициенты глав семейств по полу, возрасту и семейному состоянию:

возраст	мужчины			женщины		
	никогда не состоявшие в брак	состоящие в браке	прочие	никогда не состоявшие в брак	состоящие в браке	прочие
15-24	0,033	0,863	0,3061	0,049	0,130	0,4720
25-34	0,169	0,953	0,4406	0,312	0,130	0,6766
35-44	0,398	0,976	0,5604	0,422	0,130	0,7869
45-54	0,531	0,985	0,6862	0,485	0,130	0,8418

55-64	0,607	0,987	0,7940	0,567	0,110	0,8562
65+	0,593	0,985	0,7051	0,615	0,110	0,7398

Национальный статистический комитет выполнил прогноз численности и возрастно-половой структуры населения с учетом семейного состояния на 2005 и 2010 гг.:

возраст	мужчины			женщины		
	никогда не состоявшие в брак	состоящие в браке	прочие	никогда не состоявшие в брак	состоящие в браке	прочие
2005						
15-24	1870368	1391157	787855	16461548	2589944	1023974
25-34	4555438	3272760	1166766	3264629	4257965	1539569
35-44	2814841	4744351	1460271	2024971	5538852	1665353
45-54	3350968	12771978	4768537	2529312	13828387	4915760
55-64	1424586	14511207	4368222	1241144	13841824	6119755
65+	857993	10187896	3120362	715863	9733476	4650237
2010						
15-24	19650205	1420086	813929	17339338	2646526	1046007
25-34	5111395	3446855	1264251	3699253	4461650	1726334
35-44	3006344	4679439	1482030	2188581	5527149	1698245
45-54	3210132	11160409	4622638	2450253	12467108	4609993
55-64	1514314	14991685	4818844	1321354	14220106	6698164
65+	1052212	11835423	4034009	852533	11524117	5985122

Предполагая, что коэффициенты глав домохозяйств до 2010 года меняться не будут, выполните прогноз численности и состава домохозяйств с учетом семейного состояния их глав на 2005 и 2010 гг.

#### Задача 5

На основании следующих данных рассчитайте коэффициенты экономической активности населения Российской Федерации. Как изменились со временем возрастные распределения коэффициентов экономической активности у мужчин и женщин? Постройте возрастно-половые пирамиды всего и экономически активного населения на 1995 год.

Возрастные группы	Все население		Экономически активное население	
	1970	1995	1970	1995
Мужчины				
все	59368	69560	32675	39729
0-9	10892	10022	0	0

10-14	6740	6022	0	0
15-19	6319	5507	2749	1542
20-24	5001	5268	4315	4193
25-29	3565	4885	3452	4668
30-34	5815	5900	5652	5756
35-39	4598	6397	4448	6242
40-44	5039	5800	4866	5633
45-49	2523	4511	2367	4310
50-54	1955	2674	1733	2453
55-59	2393	4307	1834	3283
60-64	1827	2917	793	973
65+	2701	5349	464	676
Женщины				
0-4	71024	78581	33430	37181
5-9	10492	9567	0	0
10_14	6514	5829	0	0
15-19	6019	5349	2239	1254
20-24	4743	4999	3936	3881
25-29	3565	4657	3284	4203
30-34	5939	5817	5578	5451
35-39	4766	6465	4424	6164
40-44	5928	6029	5372	5761
45-49	4202	4858	3826	4516
50-54	3319	3139	2519	2601
55-59	4508	5425	1311	1870
60-64	3705	4054	744	782
65+	7325	12394	198	699

**Задача 6**

Оцените коэффициенты экономической активности мужского и женского населения в Индии и США в конце XX века. Сравните полученные результаты. Как Вы можете объяснить обнаружившиеся различия?

**А) Индия**

Возрастные группы	Все население		Экономически активное население	
	мужчины	женщины	мужчины	женщины
10-14	56056	52128	7108	5948
15-19	52488	48476	27635	17180
20-24	46398	42746	40014	18791
25-29	43918	39848	42209	17984
30-34	39639	35984	38648	19460
35-39	35083	31935	34406	15140
40-44	30420	27744	29812	14063

45-49	25060	23125	24403	12673
50-54	19826	19212	18839	7958
55-59	16006	16258	14491	6321
60-64	13040	13716	9168	3835
65+	23752	26344	12510	3562

## А) США

Возрастные группы	Все население		Экономически активное население	
	мужчины	женщины	мужчины	женщины
10-14	10509	10025	0	0
15-19	10125	9661	4069	3619
20-24	9446	9111	7419	6598
25-29	9524	9336	8660	7456
30-34	10369	10205	9660	8144
35-39	11694	11447	10916	9284
40-44	11611	11455	10702	9410
45-49	10217	10276	9420	8227
50-54	8788	8996	7785	6485
55-59	6703	7023	5133	4141
60-64	5236	5669	2636	1882
65+	14452	20379	1950	1510

## Задача 7

Известны возрастные коэффициенты экономической активности для всего населения США за ряд лет. Методом экстраполяции выполните прогноз коэффициентов экономической активности на 2000, 2005, 2010 и 2015 гг.

Возрастные группы	1970	1980	1990	1995
10-14	1,76	0	0	0
15-19	40,81	46,31	43,41	41,13
20-24	71,59	78,17	75,75	75,64
25-29	71,19	80,74	82,52	83,97
30-34	70,94	79,8	83,44	85
35-39	72,94	80,29	84,45	85,88
40-44	74,36	80,18	84,68	85,93
45-49	74,33	77,53	83,79	84,95
50-54	72,41	72,82	77,83	79,03
55-59	67,62	64,9	67,1	67,34
60-64	53,42	45,88	44,61	43,05
65+	16,12	12,52	11,07	10,52

*Задача 8*

Известны перспективные оценки экономической активности и численности всего населения Бразилии. Выполните прогноз численности и состава экономически активного населения Бразилии на 2005 и 2010 гг., определите численность и возрастно-половые характеристики населения, не являющегося экономически активным.

Возрастные группы	Все население		Коэффициенты экономической активности	
	2005	2010	2000	20010
<b>Мужчины</b>				
10-14	8178	8074	14,89	11,64
15-19	8559	8140	63,15	60,15
20-24	8709	8477	90,00	89,25
25-29	8161	8585	95,99	95,92
30-34	7101	8012	97,15	97,14
35-39	6567	6941	96,66	96,63
40-44	6213	6385	95,23	95,14
45-49	5164	5994	92,50	92,23
50-54	4205	4919	82,65	81,69
55-59	3198	3930	73,68	72,39
60-64	2328	2911	63,10	61,55
65+	4491	5189	28,53	26,99
<b>Женщины</b>				
10-14	7919	7810	10,42	10,23
15-19	8317	7903	46,93	48,68
20-24	8528	8290	51,16	50,67
25-29	8232	8488	51,18	50,69
30-34	7335	8179	54,43	53,91
35-39	6852	7271	50,90	50,41
40-44	6562	6770	48,25	47,79
45-49	5539	6452	47,42	46,97
50-54	4592	5407	36,25	35,91
55-59	3584	4434	30,01	29,72
60-64	2708	3407	23,18	22,96
65+	5936	6988	4,83	4,71

*Задача 9*

Известно распределение экономически активного населения по секторам экономики в Бразилии за ряд лет (в %):

Сектор	1970	1980	1990	1995
Сельское хозяйство	55,17	47,24	36,67	23,28

Промышленность	17,16	19,97	23,92	22,95
Сфера услуг	27,67	32,79	39,41	53,77

- 1) С помощью экстраполяции оцените распределение экономически активного населения по секторам экономики в 2000, 2005 и 2010 гг.
- 2) На основе результатов *Задачи 8* и оценок экстраполяции оцените распределение экономически активного населения по секторам экономики в абсолютных значениях.
- 3) На основе результатов *Задачи 4* и предполагая, что с 1995 г. распределение по секторам экономики не изменяется, оцените распределение экономически активного населения по секторам экономики в абсолютных значениях.
- 4) Сравните полученные в 2) и 3) результаты.

#### *Задача 10*

Известны оценки коэффициентов экономической активности за прошлые годы и прогнозные оценки численности населения России. Требуется выполнить два варианта прогноза численности экономически активного населения на 2005 и 2010 гг.:

1 вариант – с использованием гипотезы неизменности коэффициентов экономической активности с 2000 года;

2 вариант – с использованием гипотезы трендовых изменений коэффициентов экономической активности.

Вычислите численность и структуру экономически неактивного населения.

Сравните полученные результаты.

Постройте возрастно-половые пирамиды экономически активного населения и всего населения Российской Федерации в 2010 гг.

Коэффициенты экономической активности населения Российской Федерации (на 100 населения):

	1960	1970	1980	1990	1995	2000
<b>мужчины</b>						
15-19	47,42	43,51	37,56	29,87	28	26,12
20-24	85,68	86,29	86,89	80,02	79,59	79,16

25-29	96,86	96,82	96,78	96,28	95,56	94,84
30-34	96,62	97,2	97,79	97,63	97,55	97,46
35-39	95,29	96,75	98,2	97,65	97,58	97,51
40-44	95,24	96,57	97,9	97,21	97,13	97,04
45-49	91,97	93,84	95,72	95,6	95,55	95,49
50-54	86,76	88,67	90,57	91,76	91,71	91,65
55-59	75,3	76,64	77,99	79,26	76,22	73,17
60-64	47,24	43,41	38,85	34,69	33,36	32,02
65+	18,92	17,18	15,1	13,21	12,64	12,07
женщины						
15-19	43,21	37,19	32,15	24,85	23,44	22,02
20-24	77,88	82,98	84	78,05	77,63	77,21
25-29	78,32	92,14	93,78	90,1	90,25	90,4
30-34	75,05	93,92	95,45	93,56	93,71	93,85
35-39	76,97	92,83	96,18	95,23	95,34	95,44
40-44	71,2	90,62	95,68	95,47	95,56	95,64
45-49	68,11	91,06	92,39	92,81	92,96	93,1
50-54	55,53	75,89	81,35	82,6	82,86	83,11
55-59	26,62	29,08	32,02	34,33	34,47	34,61
60-64	20,08	20,07	20,07	20,06	19,29	18,52
65+	2,4	2,7	3,44	5,89	5,64	5,38

Оценки численности населения Российской Федерации в 2005 и 2010 гг.:

Возраст	мужчины		женщины	
	2005	2010	2005	2010
15-19	4095		3895	
20-24	5976		5759	
25-29	5951		5848	
30-34	5353		5355	
35-39	5066		5004	
40-44	4654		4660	
45-49	5499		5772	
50-54	5758		6333	
55-59	4974		5802	
60-64	3639		4571	
65+	6397		13291	
Всего 15+	59367		68300	

#### Задача 11

Имеются два варианта прогноза численности и половозрастной структуры населения России на 2010 и 2020 гг. Первый вариант – пессимистический – основан на гипотезе низкой рождаемости, второй вариант – оптимистический –

основан на гипотезе повышения рождаемости до уровня простого воспроизводства. Проанализируйте, как влияет рост рождаемости на численность и структуру экономически активного населения.

Указание: предположите, что уровень экономической активности не меняется с 2000 года (см. Задачу 10).

Численность и возрастно-половой состав населения России в 2010 и 2020

гг.

Возраст	Мужчины		Женщины	
	2010	2020	2010	2020
0-4				
5-9				
10-14				
15-19				
20-24				
25-29				
30-34				
35-39				
40-44				
45-49				
50-54				
55-59				
60-64				
65+				
Всего				

#### Задача 12

В Вашем распоряжении имеются следующие данные для страны N:

Таблица 1. Численность населения в возрасте от 6 до 24 лет (в тыс.):

Возраст	Мужчины		Женщины	
	2007	2013	2007	2013
6	114,7	109,5	107,5	106,6
7	112,2	107,0	104,7	104,8
8	109,1	104,4	101,5	103,0
9	105,5	101,7	98,0	101,2
10	101,2	99,0	94,0	99,7
11	96,5	95,6	89,8	97,2
12	91,2	91,9	85,4	94,4
13	85,6	87,6	80,7	91,0
14	79,5	82,9	75,8	87,2
15	72,5	77,3	70,2	82,5
16	66,4	72,4	65,7	78,0

17	60,6	67,6	61,7	73,5
18	55,2	63,0	58,2	68,8
19	50,3	58,6	55,1	64,2
20	45,1	54,2	52,6	59,1
21	41,7	50,3	50,7	54,9
22	39,2	46,8	49,3	51,0
23	37,6	43,5	48,4	47,6
24	37,3	40,6	48,0	44,8

Таблица 2. Перспективные оценки коэффициенты охвата обучением:

Школы	Мужчины		Женщины	
	2007	2013	2007	2013
Начальная	0,83	0,87	0,77	0,8
Средняя неполная	0,65	0,68	0,45	0,48
Средняя полная	0,32	0,35	0,23	0,25
ВУЗы	0,16	0,17	0,14	0,15

Таблица 3. Доля учащихся в государственных и частных школах:

Школы	Государственные		Частные	
	2007	2013	2007	2013
Начальная	0,78	0,76	0,22	0,24
Средняя неполная	0,73	0,71	0,27	0,29
Средняя полная	0,68	0,66	0,32	0,34
ВУЗы	0,42	0,44	0,58	0,56

Требуется выполнить прогноз на 2007 и 2013 г.:

- численности учащихся на отдельных ступенях обучения;
- численности учащихся в частных и государственных школах;
- численность учителей на каждой ступени обучения. Согласно выработанным нормативам, в среднем на одного учителя на первых трех ступенях должно приходиться 20 учеников, в ВУЗах на одного преподавателя должно приходиться 15 студентов.

#### Задача 13\*

В некоторый ВУЗ к началу учебного года было зачислено 4000 человек. В то же время на первом курсе начнут учиться 50 человек, которые ушли в академический отпуск в предыдущем году. К концу учебного года за

неуспеваемость с первого курса было отчислено 500 человек, 1 умер, 1 ушел по собственному желанию и 30 ушли в академический отпуск.

К началу учебного года на второй курс перешло с первого 3450 человек. С вечернего отделения было переведено 40 человек. К концу года за неуспеваемость было отчислено 300 человек, в академический отпуск ушло 40 человек, естественной убыли не было.

На третий курс со второго перешли 3100 человек. 30 человек было переведено с вечернего отделения, 7 – из другого ВУЗа, 10 человек возвратились из академического отпуска, 70 человек было отчислено за неуспеваемость, в академический отпуск ушли 80 человек.

На 4 курс с третьего перешли 2980 человек. Переводов студентов из других ВУЗов не было, 10 человек вернулось из академического отпуска, 10 человек были отчислены за неуспеваемость, 10 человек ушли в академический отпуск.

Определите:

(1) численность студентов на каждом курсе к концу учебного года, численность выпускников ВУЗа.

(2) Постройте матрицу вероятностей перехода.

#### *Задача 14\**

Пусть к началу учебного года на каждом курсе было 4000, 3700, 3300 и 2990 студентов. Пусть матрица вероятностей перехода из задачи 13 остается неизменной в течение длительного периода времени.

Определите:

- 1) Численность студентов в ВУЗе в начале следующего учебного года, если планируется внешний прием на первый курс 4005 студентов, на второй курс – 40 студентов, на третий курс – 40 студентов.
- 2) Сколько студентов будет оставлено на второй год (уйдет в академический отпуск)?
- 3) Какой будет численность студентов ВУЗа через 5 лет, если планируется принимать на первый курс 4100 студентов, а внешний прием на остальные курсы прекратить.

**Задача 15**

В стране N за последние годы были зафиксированы следующие уровни потребления разных видов помощи, предоставляемой системой социальной защиты городскому населению:

Доля лиц, получающих помощь от системы социальной защиты (%):

Вид помощи	Пол	65-69	70-74	75-79	80+
Помощь лежачим больным	Мужчины	3,7	3,8	5,0	4,6
	Женщины	0,0	3,9	5,0	7,1
	Оба пола	1,5	3,9	5,0	6,4
Ежедневная помощь по уходу	Мужчины	3,8	5,3	5,3	19,5
	Женщины	1,3	5,2	2,4	18,4
	Оба пола	2,4	5,2	3,4	18,7
Ежедневная помощь по хозяйству	Мужчины	5,2	13,0	14,3	23,2
	Женщины	4,3	4,1	9,8	9,2
	Оба пола	4,7	7,5	11,4	13,3
Не нуждались в социальной защите	Мужчины	68,8	55,7	44,3	17,1
	Женщины	69,1	54,3	31,7	21,6
	Оба пола	69,0	54,8	36,1	20,2

Использованы материалы из Minder C., Abelin T., *Projections of Needs, Impairments, and Morbidity of the Elderly in Switzerland*. In: *Health Projections in Europe: Methods and Applications*. Copenhagen. WHO Regional Office for Europe. 1986.

Оцените численность пожилых людей, которым будет оказываться помощь через пять и десять лет. Указания: используйте данные прогноза численности населения (см. таблицу 1); предположите, что в ближайшие 10 лет уровень получаемой помощи существенно не изменится.

Таблица 1.

Прогноз численности и возрастно-полового состава пожилого населения страны N.

пол	Прогностический интервал	65-69	70-74	75-79	80+
Мужчины	5 лет	203	161	135	175
Женщины	10 лет	214	188	178	312
Мужчины	5 лет	263	181	132	168
Женщины	10 лет	270	202	169	327

**РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ**

Решение Задачи 13

1) К концу учебного года училось:

на первом курсе  $s(1) = 4000+50-500-1-1-30=3518$  студентов

на втором курсе  $s(2) = 3450+40-300-40=3150$  студентов

на третьем курсе  $s(3) = 3100+30+7+10-70-80=2997$  студентов

численность выпускников  $2980+10-10-10=2970$ .

3) Вычислим вероятность перехода с первого курса на второй:

$P(2,1)=$ численность студентов в начале года/численность студентов в конце года= $3518/4050=0,869$ .

Аналогично:

$P(3,2)=3150/3490=0,903$

$P(4,3)=2997/3147=0,952$

$P(в,4)=2970/2980=0,997$

Определим вероятность остаться на второй год:

На первом курсе:

$P(1,1)=$ численность студентов, ушедших в академический отпуск/численность студентов в конце года= $30/4050=0,007$

Аналогично:

$P(2,2)=40/3490=0,011$

$P(3,3)=80/3147=0,025$

$P(4,4)=10/2980=0,003$

Матрица вероятностей перехода будет иметь следующий вид:

0,007	0	0	0
0,869	0,011	0	0
0	0,903	0,025	0
0	0	0,952	0,003

Ответ Задачи 14: (1) 14203 студента; (2) 160 человек; (3) 14320

**ЛИТЕРАТУРА**

- Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В., Вычислительные методы для инженеров. М., 1994.
- Баркалов Н.Б., Моделирование демографического перехода. М., 1984.
- Бермант М.А., Семенов Л.Н., Сулицкий В.Н., Математические модели и планирование образования. М., 1972.
- Борисов В.А. Демография. Учебник для вузов. – М.: NOTA BENE Медиа трейд Компания, 2005.
- Боярский А.Я., Бахметова Г.Ш., Харченко Л.П. Практикум по демографии. – М.: Мысль, 1985.
- Брасс У. Об одном способе выражения закономерностей смертности. // В кн.: Изучение продолжительности жизни. – М., 1977.
- Валентей Д.И., Кваша А.Я. Основы демографии. – М., 1989.
- Вандескрик К. Демографический анализ /Пер. с фр. Н.М. Калмыковой – М.: Академический проект; Гаудеамус, 2005.
- Введение в демографию. Под ред. В.А. Ионцева и А.А. Саградова. М., ТЕИС, 2002.
- Венецкий И.Г. Математические методы в демографии. – М.: Статистика, 1971.
- Венецкий И.Г. Статистические методы в демографии. – М.: Статистика, 1977.
- Вишневский А.Г. Воспроизводство населения и общество. – М., 1982.
- Волков А.Г. Семья – объект демографии. – М.: Мысль, 1986.
- Воспроизводство населения СССР. – М., 1983.
- Гаврилов Л.А., Гаврилова Н.С. Биология продолжительности жизни. – М., 1991
- Гревилл Т. Таблицы смертности по причинам смерти. В кн.: Изучение продолжительности жизни. М., 1977.
- Демографические модели. Под редакцией Е.М. Андреева и А.Г. Волкова. М., 1977.
- Демографические процессы и их закономерности. М., под ред. А.Г. Волкова. М., 1986.
- Демографический понятийный словарь / Под ред. Проф. Л.Л. Рыбаковского. – М.: ЦСП, 2003.
- Демография и статистика населения: Учебник / И.И. Елисеева, Э.К. Васильева, М.А. Клупт и др.; Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2006.
- Демоскоп. Еженедельный Интернет-журнал Центра демографии и экологии человека. – <http://www.demoscope.ru>
- Денисенко М.Б., Ионцев В.А., Хорев Б.С. Миграциология. – М.: Изд-во МГУ, 1989.
- Изард У., Методы регионального анализа: введение в науку о регионах. – М., 1966.
- Капица С. Математическая модель роста населения.// Математическое моделирование. 1992, Т. 4, № 6.

- Капица С. Сколько людей жило, живет и будет жить на Земле. Очерки теории роста человечества. М., 1999.
- Корчак–Чепурковский Ю.А. О методах изучения воспроизводства населения //В сб. «Избранные демографические исследования». – М.: Статистика, 1970.
- Курс демографии. Под ред. А.Я. Боярского. 1-е изд. – М.: Статистика, 1967.
- Курс демографии. Под ред. А.Я. Боярского. 2-е изд. – М.: Статистика, 1974.
- Курс демографии. Под ред. А.Я. Боярского. М., 1984.
- Курс демографии. Под ред. А.Я. Боярского. – М., 1985.
- Марчук Г.И., Методы вычислительной математики. М., 1989.
- Методические указания и типовые задачи по основным темам курса демографии. – М.: МЭСИ, 1971.
- Методология демографического прогноза. – М.: Наука, 1988.
- Методы исследования. – М.: Мысль, 1986.
- Мэнкью М., Курс макроэкономики. М., 1996.
- Народонаселение. Энциклопедический словарь. – М.: БРЭ, 1994.
- Население России за 100 лет (1897 – 1997): Стат. сборник /Госкомстат России. – М., 1998.
- Неравенство и смертность в России /Под ред. В. Школьников, Е. Андреева, Т. Малевой. – М.: Сигнал, 2000
- Организация Объединенных Наций, Руководства по методике демографических исследований. Руководство IV. Методы исчисления основных демографических показателей по неполным данным. Нью-Йорк, 1971.
- Пирожков С.И., Демографические процессы и возрастная структура. М., 1976.
- Пресса Р. Народонаселение и его изучение. (Демографический анализ). – М.: Статистика, 1966.
- Семенова А.С. Сборник задач по курсу демографии. – М.: Статистика, 1972.
- Синельников А.Б. Брачность и рождаемость в СССР: Вопросы демографии. - М.: Наука, 1989.
- Статистика населения с основами демографии: Учебник / Г.С. Кильдишев, Л.Л. Козлова, С.П. Ананьева и др. – М.: Финансы и статистика, 1990. – Главы 7 и 8.
- Столерю Л., Равновесие и экономический рост. М., 1974.
- Тольц М.С. Демографический анализ брачности: проблемы, методы, интерпретация результатов. /Методы исследования. – М.: Мысль, 1986. – сс. 79 – 95.
- Ягельский А., География населения. М., 1980.
  
- Bonneuil N., Introduction a la modelisation démographique. Armand Colin, Paris, 1997

- Dittgen A., Lamy-Festy M., Travaux pratiques d'analyse démographique. – Masson, Paris, 1989
- Dupâquier J. L'invention de la table de mortalité. – Paris, 1996.
- Franck Cadier C. Démographie. Tome 1, 2. – Paris: Economica, 1990.
- Henry L. Démographie. Analyse et modèles. – Paris: INED, 1984.
- Hinde A. Demographic Methods. – N.-Y.: Arnold, 1998
- Keyfitz N., Applied Mathematical Demography. N.-Y. 1985.
- Keyfitz N., Demography through Problems. New York, 1984.
- Keyfitz N., Beekman J.A., Demography through Problems. Springler-Verlag, New York, 1984
- Manuel d'analyse de la mortalité. Sous la direction de R. Pressat. – Paris: INED, 1985.
- Nombissi A. Principes et méthodes d'analyse démographique. Travaux dirigés. – Université Catholique de Louvain ; année académique 1995 – 1996.
- Pol L.G., Thomas R.K. The Demography of Health and Health Care. – N.-Y.: Plenum Press, 1994. – pp.186 – 196.
- Pollard A.H., Yusuf F., Pollard G.N., Demographic Techniques. – Pergamon Press Australia, 1974.
- Pressat R. L'Analyse démographique. Concepts, Méthodes, Résultats. – Paris : PUF, – 1973.
- Preston S., Heuveline P., Guillot M., Demography. Measuring and Modeling Population Processes. Blackwell Publishers. 2001.
- Reading in Population Research Methodology. Volume 5. Population Models, Projections and Estimates. Chicago, 1993.
- Rogers A., Multiregional Demography. Winchester: John Wiley & Sons. 1995.
- Roussell L., Gani L. et Girard A., Analyse Démographique. Exercices et problèmes, Librairie A.Colin, Paris, 1973
- Santini A., Analisi Demografica. Applcazioni. La Nuova Italia, 1992
- Schoen R., Modeling Multigroup Populations. New York: Plenum Press. 1988.
- Shryock H. S., Siegel J.S., The Methods and Materials of Demography. Volume 2. Washington, 1973.
- Shryock H.S., Siegel J.S., Methods and Materials of Demography. – Washington, D.C., 1973. Vol. 2. «Reproductivity».
- United Nation, Manual X. Indirect techniques for demographic estimation. – New York, 1983
- United Nations, Projection methods or Integrating Population Variables into Development Planning/ Volume 1. Methods for comprehensive Planning. New - York, 1989.
- United Nations, Methods of Measuring Internal Migration, Population Studies No. 47. New-York, 1970.
- United Nations, Projection Methods for Integrating Population Variables into Development Planning. Volume 1. Module 2. Methods for preparing school enrolment, labour force and employment projections. N.Y., 1989.
- United Nations, Projection Methods for Integrating Population Variables into Development Planning. Volume 1. Module1. Conceptual issues and methods for preparing demographic projections. N.Y., 1989.

- 
- Vandeschrick Ch. Analyse démographique. 2ème édition. – LLN: Academia-Bruylant-L'Harmattan, 2000.
  - Wunsch G., Termot M. Introduction to demographic analysis. – N.-Y.: Plenum Press, 1978.